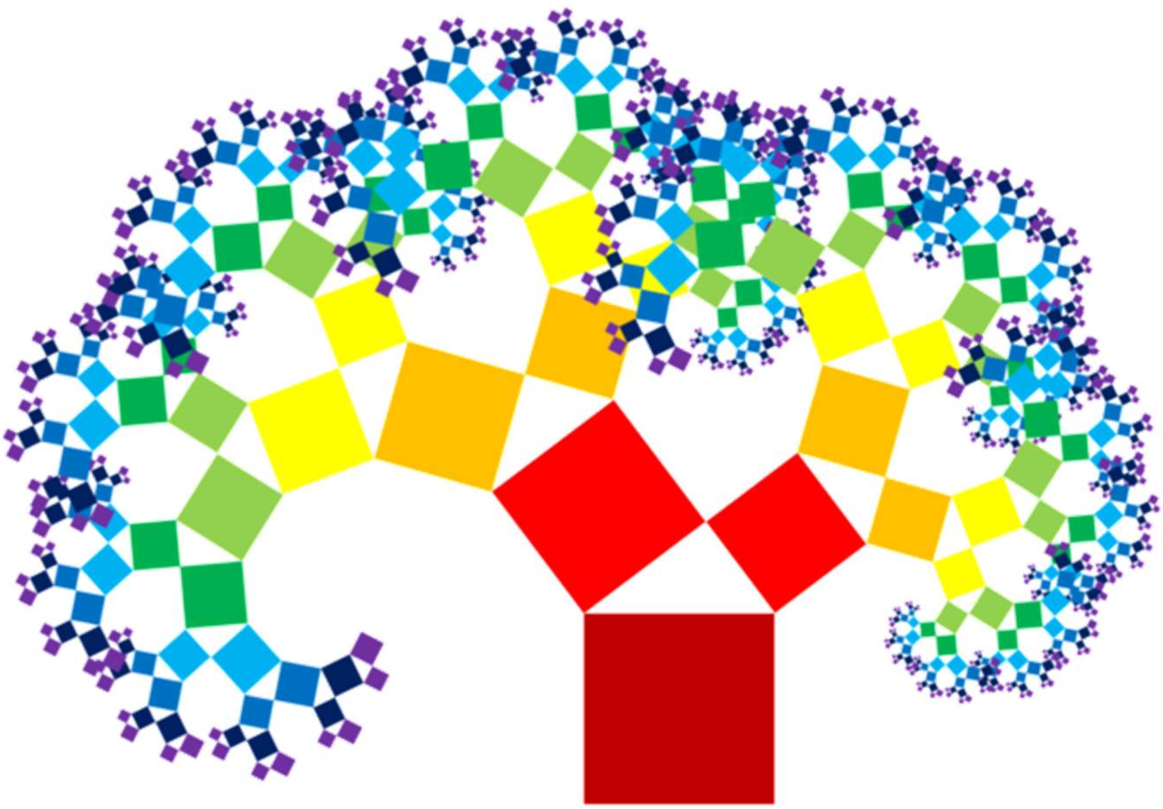
県立千葉高校数学研究会

かずけん

千秋祭

２０２４



目次

放物線を究める

2年C組　藤井 佑成

この記事は, 放物線に関する自作問題と, その解説です。
中学生向け: 問 1　　数 III 未修者向け: 問 1, 問 2, 問 3

問 題

放物線 $P : y = x^2$ について以下の問いに答えよ。ただし, 原点を O とする。また, P の X から Y までの部分を弧 XY のように呼ぶことにする。

問 1　P 上に 2 点 $A(a, a^2), B(b, b^2)$ をとり, A, B における P の接線を t_A, t_B, その交点を C とする。
(1)　t_A, t_B の方程式を求めよ。
(2)　$t_A \perp t_B$ のとき, C の軌跡を求めよ。
(3)　(2) のとき, 直線 AB は定点を通る。この定点の座標を求めよ。
(4)　A における P の法線を n_A とおく。(2) のとき, n_A と直線 AB がなす角は n_A と y 軸がなす角に等しいことを示せ。

問 2　P 上に 2 点 A, B をとり, A, B における P の接線の交点を C とする。$\triangle ABC$ の面積を S_1, 直線 AB と P で囲まれた図形の面積を S_2 とおくとき, $S_1 : S_2$ を求めよ。

問 3
(1)　P の法線弦の長さの最小値を求めよ。
(2)　P と P の法線が囲む面積の最小値を求めよ。

問 4　点 $Q(a, b)$ を通る P への法線を 3 本引き, それらの足を A,B,C とおく。
(1)　Q の存在範囲を図示せよ。
(2)　4 点 A, B, C, O は同一円周上にあることを示せ。

問 5　P 上に点 $A(1, 1)$ をとり, 直線 OA と弧 OA に囲まれた図形を D とする。
(1)　D の面積を求めよ。
(2)　D の重心の座標を求めよ。
(2)　D の周長を求めよ。

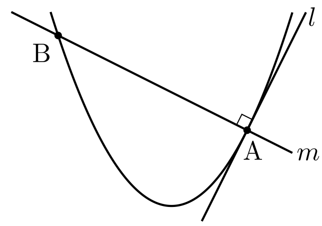
問 6　$\dfrac{\pi}{3}$ をなす P の 2 接線の交点の軌跡を求めよ。

難易度:

問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6
易	易	中	難	難	難

参 考

接線・法線・弦



$l : A$ における**接線**
$m : A$ における**法線**
線分 AB : **法線弦** (放物線内部の法線)

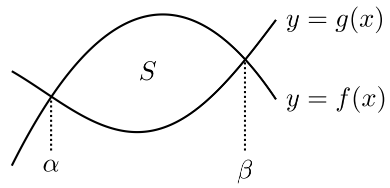
1/6 公式

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta) = -\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

曲線に囲まれた図形の重心

図のように $y = f(x)$ と $y = g(x)$ に囲まれた図形の重心の座標を $(\overline{x}, \overline{y})$ とすると,

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int_\alpha^\beta x\{f(x) - g(x)\}\,dx$$
$$\overline{y} = \frac{1}{S}\int_\alpha^\beta \frac{f(x)+g(x)}{2}\{f(x) - g(x)\}\,dx$$



曲線の長さ

$y = f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ の部分の長さは,

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$

双曲線関数

双曲線関数 sinh と cosh は以下のように定義される。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

双曲線関数の微分・積分は,

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$
$$\int \sinh x\,dx = \cosh x, \quad \int \cosh x\,dx = \sinh x$$

解 答

問1 (1) $t_A : y = 2ax - a^2 \quad t_B : y = 2bx - b^2$

(2) 直線 $y = -\dfrac{1}{4}$ (3) $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ (4) 解説参照

問2 $S_1 : S_2 = 3 : 2$

問3 (1) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{4}{3}$

問4 (1) 解説参照 (2) 解説参照

問5 (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}\right)$ (3) $\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\log(2+\sqrt{5})}{4}$

問6 双曲線 $9\left(y + \dfrac{5}{12}\right)^2 - 3x^2 = 1$ の下弦

解 説

問1

(1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$ より,

$$t_A : y = 2a(x-a) + a^2 \iff \boldsymbol{y = 2ax - a^2}$$
$$t_B : y = 2b(x-b) + b^2 \iff \boldsymbol{y = 2bx - b^2}$$

(2) t_A と t_B を連立して,

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \iff 2(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$\iff x = \frac{a+b}{2} \quad (\because a \neq b)$$

接線の方程式に代入して, $C\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$ となる。

また, $t_A \perp t_B$ より,

$$2a \times 2b = -1 \iff ab = -\frac{1}{4}$$

このとき, $X = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと, $C\left(X, -\dfrac{1}{4}\right)$ となり,

解と係数の関係より a, b は 2 次方程式 $t^2 - 2Xt - \dfrac{1}{4} = 0$ の 2 解なので, a, b の存在条件すなわち X の定義域は,

$$D > 0 \iff X^2 + \frac{1}{4} > 0 \iff X \text{ はすべての実数}$$

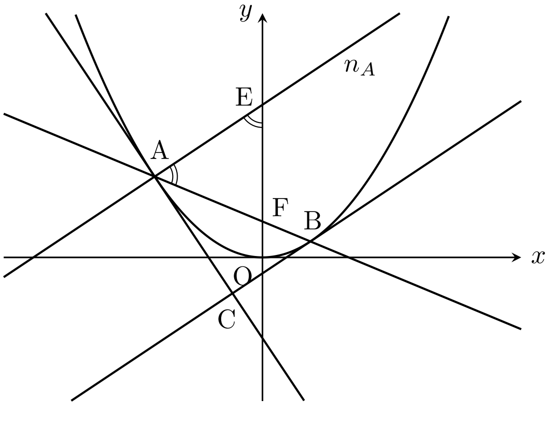
より, C は**直線** $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{4}}$ 上を動く。

(3) 直線 AB の方程式は, $ab = -\dfrac{1}{4}$ より,

$$y = \frac{a^2 - b^2}{a - b}(x - a) + a^2 \iff y = (a+b)x + \frac{1}{4}$$

よって, $x = 0, y = \dfrac{1}{4}$ は a, b の値に関わらず常にこれをみたすから, 求める定点の座標は $\boldsymbol{\left(0, \dfrac{1}{4}\right)}$

(4) 下図のように点 E, F を定める。



このとき, $\angle AEF = \angle EAF$ となるには, $\triangle AEF$ が二等辺三角形, すなわち $AF = EF$ であればよい。(4) より AB は必ず点 $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ を通るから, $F\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ である。

よって,

$$AF = \sqrt{a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^4 + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{16}}$$
$$= a^2 + \frac{1}{4} \quad \left(\because a^2 + \frac{1}{4} > 0\right)$$

また, n_A は BC と平行なので, その方程式は,

$$y = 2b(x - a) + a^2$$
$$\iff y = 2bx + a^2 + \frac{1}{2} \quad \left(\because ab = -\frac{1}{4}\right)$$

よって, y 切片は $E\left(0, a^2 + \dfrac{1}{2}\right)$ なので,

$$EF = \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = a^2 + \frac{1}{4}$$

以上より, $AF = EF$ となり, 題意は示された。 □

考察 (2) で求めた直線はこの放物線の**準線**, (3) で求めた点はこの放物線の**焦点**になっているから,

放物線の 2 接線が直交するとき, 2 接線の交点は準線上にあり, 2 接点と焦点は同一直線上にある

がいえる。また, A を通り y 軸と平行な直線の A より上の部分に G をとれば, $\angle GAE = \angle AEF$ なので, $\angle GAE = \angle EAF$ が成り立つ。これらを入射角・反射角とみれば,

$\boldsymbol{y}$ 軸に平行な光線が $\boldsymbol{P}$ で反射すると焦点に集まる

もいえる。

問2

$A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ とおく。このとき $a < b$ としても一般性を失わない。直線 AB の方程式は,

$$y = \frac{a^2 - b^2}{a - b}(x - a) + a^2 \iff y = (a+b)x - ab$$

よって,

$$S_2 = \int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\}\, dx$$
$$= -\int_a^b (x-a)(x-b)\, dx$$
$$= \frac{(b-a)^3}{6} \quad (\because 1/6 \text{ 公式})$$

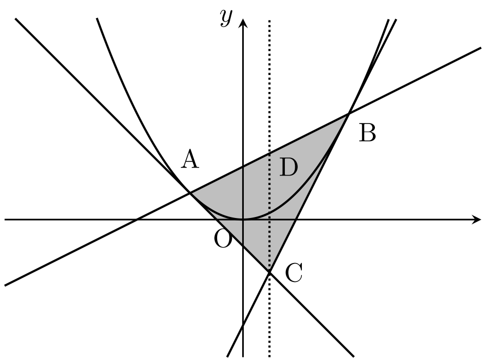
$y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$ より, A, B における接線の方程式はそれぞれ,

$$y = 2a(x-a) + a^2 \iff y = 2ax - a^2$$
$$y = 2b(x-b) + b^2 \iff y = 2bx - b^2$$

これらを連立して,

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \iff 2(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$\iff x = \frac{a+b}{2} \quad (\because a < b)$$

接線の方程式に代入して, $C\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$ となる。よって, 下図のように C を通り y 軸と平行な直線と AB の交点 D をとれば, D は AB の中点となり, $D\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$ である。



よって, CD を底辺, A, B の x 座標の差を高さと見て,

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^2+b^2}{2} - ab\right) \times (b-a) = \frac{(b-a)^3}{4}$$

以上より,

$$S_1 : S_2 = \frac{(b-a)^3}{4} : \frac{(b-a)^3}{6} = \mathbf{3 : 2}$$

問3

(1) P 上の点 $A(t, t^2)$ における接ベクトルは $(1, 2t)$ なので, A における法線の方程式は,

$$(x-t, y-t^2) \cdot (1, 2t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x + 2ty - 2t^3 - t = 0$$

これと P のもう 1 つの交点を B とおくと, $t = 0$ のとき B は存在しないので $t \neq 0$ であり, 上式に $y = x^2$ を代入して,

$$2tx^2 + x - 2t^3 - t = 0$$
$$\Leftrightarrow \ (x-t)(2tx + 2t^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x = t, \ -t - \frac{1}{2t} \ \ (\because t \neq 0)$$

より, $B\left(-t - \dfrac{1}{2t}, t^2 + 1 + \dfrac{1}{4t^2}\right)$ となる。よって,

$$AB^2 = \left\{\left(-t - \frac{1}{2t}\right) - t\right\}^2 + \left\{\left(t^2 + 1 + \frac{1}{4t^2}\right) - t^2\right\}^2$$
$$= 4t^2 + \frac{3}{4t^2} + \frac{1}{16t^4} + 3$$

ここで $T = t^2$ とおくと $t \neq 0$ より $T > 0$ であり,

$$AB^2 = 4T + \frac{3}{4T} + \frac{1}{16T^2} + 3$$

これを $f(T)$ とおくと,

$$f'(T) = 4 - \frac{3}{4T^2} - \frac{1}{8T^3} = \frac{1}{8T^3}(2T-1)(4T-1)^2$$

よって, $T > 0$ における $f(T)$ の増減表は以下の通り。

T	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(T)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(T)$		↘		↘		↗

よって, $T = \dfrac{1}{2}$ のとき $f(T)$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。したがって, 法線弦 AB の長さの最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2) (1) より $t \neq 0$ であり, 対称性より $t > 0$ において考えれば十分。よって, 法線 AB と P が囲む面積は,

$$-\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t} \left(x + t + \frac{1}{2t}\right)(x-t)\,dx$$
$$= \frac{\left\{t - \left(-t - \dfrac{1}{2t}\right)\right\}^3}{6} \ \ (\because 1/6 \text{ 公式})$$
$$= \frac{\left(2t + \dfrac{1}{2t}\right)^3}{6}$$
$$\geqq \frac{\left(2\sqrt{2t \cdot \dfrac{1}{2t}}\right)^3}{6} = \frac{4}{3} \ \ (\because \text{相加平均・相乗平均の関係})$$

よって, 求める最小値は $t = \dfrac{1}{2}$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

問4

$\boxed{\text{指針}}$ (1) は接点を文字でおき, 接点の数を法線の数とみる。(2) は座標が分かる点の共円条件なので, 複素数平面に落としこむ。

(1) 接点を (t, t^2) とおくと, この点における接ベクトルは $(1, 2t)$ なので, 法線の方程式は,

$$(x-t, y-t^2) \cdot (1, 2t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ x + 2ty - 2t^3 - t = 0$$

これが $Q(a, b)$ を通るとき, 代入して,

$$-2t^3 + (2b-1)t + a = 0$$

この左辺を $f(t)$ とおく。放物線 P において接点と法線は一対一に対応するから, t の 3 次方程式 $f(t) = 0$ が異なる 3 実数解を持つ条件を考えればよい。

$$f'(t) = -6t^2 + 2b - 1$$
$$= -6\left(t + \sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)\left(t - \sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)$$

より, $b \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ の増減表は以下の通り。

t	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗		↘		↗

よって, $f(t) = 0$ が異なる 3 実数解を持つ条件は,

$$f\left(-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right) f\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow \ \left\{a - \frac{\sqrt{6}}{9}(2b-1)^{\frac{3}{2}}\right\} \cdot \left\{a + \frac{\sqrt{6}}{9}(2b-1)^{\frac{3}{2}}\right\} < 0$$
$$\Leftrightarrow \ a^2 - \frac{2}{27}(2b-1)^3 < 0$$
$$\Leftrightarrow \ (2b-1)^3 > \frac{27}{2}a^2$$

(右辺) $\geqq 0$ なので (左辺) > 0 だから, 両辺 $\dfrac{1}{3}$ 乗 して,

$$2b - 1 > \frac{3}{\sqrt[3]{2}}a^{\frac{2}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \ \ b > \frac{3}{\sqrt[3]{16}}a^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}$$

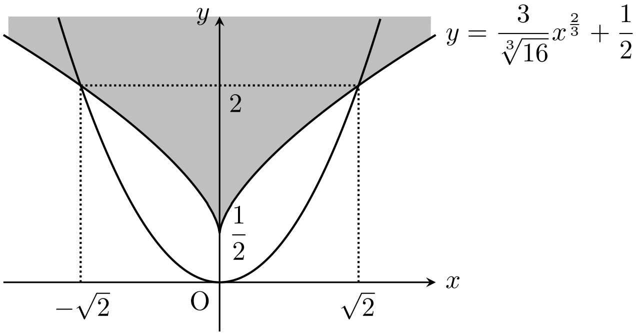
したがって, $g(x)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{16}}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{2}$ とすると, Q の存在範囲は $y=g(x)$ のグラフよりも上の部分。$g(x)=g(-x)$ なので $g(x)$ は偶関数だから, $x>0$ において考えると,

$$g'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{1}{3}}>0$$
$$g''(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{4}{3}}<0$$

よって, $g(x)$ の増減表は以下の通りで, $b \geqq \dfrac{1}{2}$ をみたす。

x	0	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	
$g''(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	∞

以上より, Q の存在範囲は下図斜線部。(境界を含まない)



考察 曲線 $y=g(x)$ は P の**縮閉線**と呼ばれる。縮閉線は P の曲率中心の軌跡であり, また P のすべての法線と接している (すなわち P の法線群の包絡線である)。

関連問題

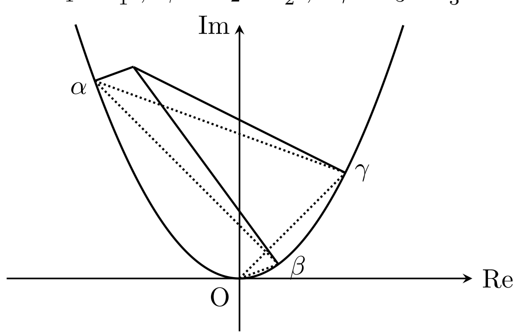
P 上の 2 点 (a,a^2), $\left(a+h,(a+h)^2\right)$ における法線の交点を Q とおく。
(1) $R=\displaystyle\lim_{h\to 0}Q$ を求めよ。
(2) R の軌跡を陽関数表示せよ。
(3) R の軌跡と P で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) A,B,C の x 座標をそれぞれ t_1,t_2,t_3 $(t_1<t_2<t_3)$ としてもよい。このとき, t_1,t_2,t_3 は $f(t)=0$ の 3 解であるから, 解と係数の関係より,

$$t_1+t_2+t_3=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{※}$$

ここで, O を原点とする複素数平面において, A,B,C に対応する複素数をそれぞれ α,β,γ とすると,

$$\alpha=t_1+t_1^2i,\quad \beta=t_2+t_2^2i,\quad \gamma=t_3+t_3^2i$$



$\beta=0$ または $\gamma=0$ のとき, A,B,C,O は同一円周上にあるから, $\beta\neq 0$ かつ $\gamma\neq 0$ のときについて示す。

$z_1=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$, $z_2=\dfrac{\gamma-0}{\beta-0}=\dfrac{\gamma}{\beta}$ とおくと, $z_2\neq 0$ であり,

$$z_1=\frac{(t_3+t_3^2i)-(t_1+t_1^2i)}{(t_2+t_2^2i)-(t_1+t_1^2i)}=\frac{(t_3-t_1)\{1+(t_3+t_1)i\}}{(t_2-t_1)\{1+(t_2+t_1)i\}}$$
$$z_2=\frac{t_3+t_3^2i}{t_2+t_2^2i}$$

※より,

$$z_1=\frac{(t_3-t_1)(1-t_2i)}{(t_2-t_1)(1-t_3i)}$$

したがって, $z_2\neq 0$ より,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(t_3-t_1)(1-t_2i)(t_2+t_2^2i)}{(t_2-t_1)(1-t_3i)(t_3+t_3^2i)}$$
$$=\frac{(t_3-t_1)(t_2+t_2^3)}{(t_2-t_1)(t_3+t_3^3)}\in\mathbb{R}$$

よって, 上図より,

$$\arg z_1=\arg z_2 \iff \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\frac{\gamma-0}{\beta-0}\right)$$

なので, 円周角の定理の逆より, A,B,C,O は同一円周上にある。 $\square$

問 5

指針 放物線と直線で囲まれた図形に関するシンプルな求値問題。しかし, (2), (3) では比較的高度な積分の計算が必要となる。(3) では双曲線関数 sinh による置換積分を行う。(tan や arctan で置換しても可能)

(1) D の面積は, 1/6 公式より,

$$\int_0^1(x-x^2)\,dx=-\int_0^1 x(x-1)\,dx=\frac{(1-0)^3}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) D の面積を S, 重心の座標を $(\bar{x},\bar{y})$ とおくと,

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\int_0^1 x(x-x^2)\,dx=\frac{1}{S}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{12S}$$
$$\bar{y}=\frac{1}{S}\int_0^1\frac{x+x^2}{2}(x-x^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{S}\int_0^1\frac{x^2-x^4}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{S}\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{10}x^5\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{15S}$$

(1) より $S=\dfrac{1}{6}$ だから, 重心の座標は, $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)}$

(3) 弧 OA の長さは,

$$\int_0^1\sqrt{1+\{(x^2)'\}^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

ここで, $2x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおくと,

$$2dx=\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt$$

$x:0\to 1$ のとき $t:0\to\log\left(2+\sqrt{5}\right)$ $(=\alpha$とおく$)$

またこのとき,

$$\sqrt{1+4x^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

よって,

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$
$$= \int_0^\alpha \frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{4}\,dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^\alpha \left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\alpha$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}+2\alpha-\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5}\right)^2+2\log\left(2+\sqrt{5}\right)-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{5}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}$$

これに線分 OA の長さ $\sqrt{2}$ を加えて, D の周長は,

$$\boldsymbol{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}}$$

問6

指針 交点を (X,Y) とおき, 接点の x 座標 a,b の関係式から X,Y の関係式を導く。

2 接点を $A(a,a^2), B(b,b^2)$ $(a<b)$ とおく。$y=x^2$ を微分すると $y'=2x$ より, A,B における接線の方程式は,

$$y=2a(x-a)+a^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=2ax-a^2$$
$$y=2b(x-b)+b^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=2bx-b^2$$

これらを連立して,

$$2ax-a^2=2bx-b^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2(a-b)x=(a+b)(a-b)$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{a+b}{2} \quad (\because a<b)$$

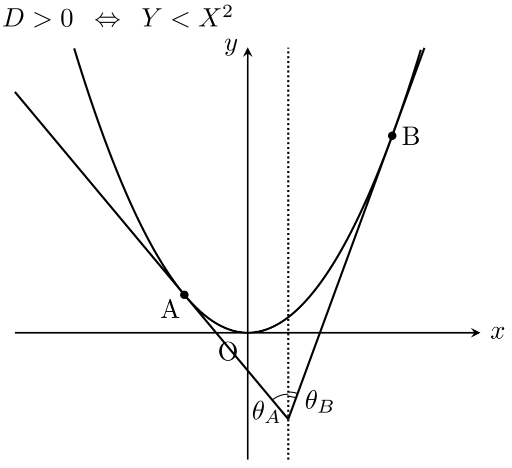
接線の方程式に代入して, 2 接線の交点は $\left(\dfrac{a+b}{2}, ab\right)$

よって, 2 接線の交点を (X,Y) とおくと,

$$a+b=2X,\ \ ab=Y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ※$$

解と係数の関係より, a,b は 2 次方程式 $t^2-2Xt+Y=0$ の 2 解ゆえ, 判別式を D とすると, (X,Y) の存在範囲は,

$$D>0 \quad\Leftrightarrow\quad Y<X^2$$



また, 2 接線が y 軸となす角をそれぞれ θ_A, θ_B とおくと, 上図より,

$$\tan\theta_A=-\frac{1}{2a},\ \ \tan\theta_B=\frac{1}{2b} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots *$$

また, 上図より $\dfrac{\pi}{3}=\theta_A+\theta_B$ なので,

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\tan\theta_A+\tan\theta_B}{1-\tan\theta_A\tan\theta_B}$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}=\frac{-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}}{1+\dfrac{1}{4ab}} \quad (\because *)$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}=\frac{2(a-b)}{4ab+1}$$
$$\Leftrightarrow\ 3=\frac{4(a-b)^2}{(4ab+1)^2} \ \text{かつ}\ \frac{2(a-b)}{4ab+1}>0$$
$$\Leftrightarrow\ 3(4ab+1)^2=4(a-b)^2 \ \text{かつ}\ 4ab+1<0 \ (\because a<b)$$
$$\Leftrightarrow\ 3(4Y+1)^2=4(4X^2-4Y) \ \text{かつ}\ 4Y+1<0 \ (\because ※)$$
$$\Leftrightarrow\ 48Y^2+40Y-16X^2+3=0 \ \text{かつ}\ Y<-\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow\ 9\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2-3X^2=1 \ \text{かつ}\ Y<-\frac{1}{4}$$

これは確かに $Y<X^2$ をみたし, 求める軌跡は,

双曲線 $\boldsymbol{9\left(y+\frac{5}{12}\right)^2-3x^2=1}$ の下弦

【関連問題の答え】

(1) $\boldsymbol{Q\left(-4a^3, 3a^2+\frac{1}{2}\right)}$

(2) $\boldsymbol{y=\frac{3}{\sqrt[3]{16}}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}}$

(3) $\boldsymbol{\frac{22\sqrt{2}}{15}}$

総 括

いかがでしたか？法線が囲む面積や放物線の長さなど, 直感的な問題がほとんどでしたが, 実際に答えを導くのは一筋縄にはいきませんでした。放物線 $y=x^2$ は中学 3 年で習う基本的なものですが, その先の学習を進めていくと, そのシンプルさの背後に隠れた新たな側面がどんどん見えてきます。新たに学んだ概念を応用して, 今まで求められなかったものが求められるようになることは, まさに数学の醍醐味ではないでしょうか。今後も数学の学びを深め, まだ知らない世界を知るのが楽しみです。

問 3(1) と問 4(2) は, 『幾何学大辞典』(岩田至康, 槙書店,1971) から題材をとりました。放物線の奥深さが感じられる, 興味深い書籍なので数学好きの方にはぜひお勧めしたいです。また, 問題の答え合わせには Geogebra の積分機能等, 文書作成には LaTeX を使用しました。どちらも数学の学びを深めるうえで非常に役に立つので, 皆さんもぜひ使ってみて下さい。

「世界のナベアツ」を数学的に考える

2 年 D 組 松土悠哉

まずはこちらをご覧いただきたい(YouTube なので通信容量に注意)。

https://www.youtube.com/watch?v=ntWfk25G7Vg

この動画は「世界のナベアツ(現: 桂三度)」の「3 の倍数と 3 がつくときにアホになる」というネタだ。

今回は$1 \leq n$ において$1 \leq x \leq 10^n$ を満たす整数xの中で、アホになる回数X_nを求めていく。

$X_n = 10^n - 3\,がつかないxの個数 + 3\,がつかず3\,の倍数になるxの個数$ なので、この 2 つを求める。

① 3 がつかないxの個数

$0 \leq x \leq 10^n - 1$を満たすxのうち、3 がつかないxの個数は、3 以外の数をn個並べるときの組み合わせの数と等しいので、

$3\,がつかないxの個数 = (10-1)^n = 9^n$ となる。

また、0 と 10^n はどちらも 3 がつかないので、$1 \leq x \leq 10^n$ においてもこれが成り立つ。

② 3 がつかず 3 の倍数になるxの個数

$0 \leq x \leq 10^n - 1$ を満たし、3 がつかないxのうち、3 で割った余りが 0 になる個数をa_n、

1 になる個数をb_n、2 になる個数をc_nとし、一般項を求めたい。

ここで、①より、$a_n + b_n + c_n = 9^n\ = 3^{2n}$である。

$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0$ である。

$1 \leq k$ において、$a_{k-1},\ b_{k-1},\ c_{k-1}$がわかっているとき、$a_k$ は 3 以外の数をk 個並べたとき 3 で割った余りが 0 になる個数、すなわち 3 以外の数を$k-1$ 個並べたとき 3 で割った余りが 0 になる個数になり、その個数は$a_{k-1},\ b_{k-1},\ c_{k-1}$から求められて

$a_k = 3a_{k-1} + 3b_{k-1} + 3c_{k-1}$となる。

$b_k,\ c_k$においても同様にして、

$b_k = 3a_{k-1} + 3b_{k-1} + 3c_{k-1}$

$c_k = 3a_{k-1} + 3b_{k-1} + 3c_{k-1}$

となるので、

$1 \leq k$ において$a_k = b_k = c_k$が分かる。

そして、 $a_k + b_k + c_k = 3^{2k}$なので、

$a_k = b_k = c_k = 3^{2k-1}$が求められる。

①②より、求める答えは

$X_n = 10^n - 3^{2n} + 3^{2n-1} - 1 = 10^n - 2 \cdot 3^{2n-1} - 1$

であることが分かった。

また、3 以外でも一般項を求めることはできるので、ぜひ試してほしい。

「お笑い」世界のナベアツ - YouTube

https://www.youtube.com/watch?v=ntWfk25G7Vg

バーゼル問題

２F　森田直希

バーゼル問題とは何か？

みなさんは左下の式を見たことがあるだろうか…？この式は整数の二乗の逆数を無限に足していくと$\pi^2/6$に収束することを表している。つまり右下の式と同じ意味である。実はこの問題一見簡単そうに見えるかもしれないが、かなりの難問である。整数どうしの四則演算によってπが登場するとはなんとも魅力的な式ではないだろうか。今回はそんな式の証明とそれがどんな風にほかの世界とつながっているのか知ってもらいたい。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad\qquad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

高校数学で解く

以下は高校数学で解こうとした証明である。ここはあまり面白くないと感じる人が多いと思うので興味のある人だけ読んでほしい。
三角関数の有名不等式やド・モアブルの法則、解と係数の関係をテクニックとして主に用いている。

証明

$k=1,2,\cdots,n$に対して$\theta\kappa=\frac{k}{2n+1}$とおく。$0\leqq\theta\kappa\leqq\frac{\pi}{2}$より，$\sin\theta\kappa\leq\theta\kappa\leq\tan\theta\kappa$を得る。

各辺の逆数をとって二乗すると，

$$\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}\leq\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2}\leq\frac{1}{(\sin\theta\kappa)^2}$$

これを変形して平方数の逆数を作る。

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}\leq\frac{1}{k^2}\leq\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}\right)$$

これを$k=1$からnまで足し合わせる。

$$\frac{\pi^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{\pi^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}\right)$$

よって，あとは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}=\frac{2}{3}$$

を証明すれば，上記の不等式の極限を取ってはさみうちの原理を使うことにより収束先が

$$\frac{\pi^2}{2^2}\times\frac{2}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$

であることが分かる。

$\sin(2n+1)\theta\kappa=0$より，$z=(\cos\theta\kappa+i\sin\theta\kappa)^{2n+1}$の虚部は0である。

また，sin $\theta\kappa \neq 0$ なので，z を $(\sin\theta\kappa)^{2n+1}$で割ることにより，

z′ $=\left(\frac{1}{\tan\theta\kappa}+i\right)^{2n+1}$の虚部は 0 である。

この z'の虚部は $\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}$ の n次多項式とみなせる。

そこで，この n次多項式を

f(x)=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}$ +・・・+a_0=0 とおくと，$k = 1,2,\cdots,n$に対して$f\left(\frac{1}{(\tan\theta\kappa)^2}\right)$=0 である。

すなわち n次方程式$f(x) = 0$ の解が n個全て構成できたので解と係数の関係より，

Sn=$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

実際，二項定理を用いて計算すると，

$a_n = 2n + 1$，a_{n-1}=$-\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$ なので

Sn=$\frac{n(2n-1)}{3}$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Sn}}{n^2}=\frac{2}{3}$$

が示された。

<u>オイラーによる解法</u>

実はこの問題は発表後 91 年後、1735 年にレオンハルト・オイラーが解いたものである。
それほど難問であるということだ。ここからはオイラーによる解法を紹介する。大学数学が入るが難しいものではないのでそれを認めてもらってよんでもらえれば十分に楽しめると思う。

証明

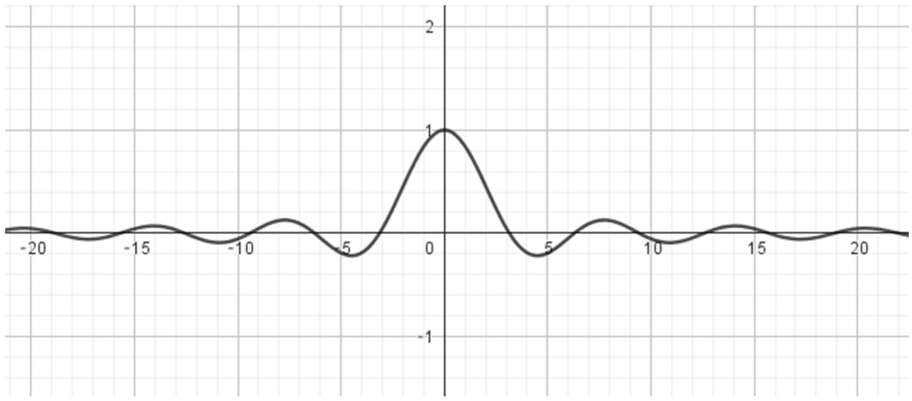
まず$\sin x$という関数を用意しそれをマクローリン展開[i]する。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

両辺をxで割ると、

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \qquad (1)$$

ちなみに上の関数は次の図のようになります。



ここで、左辺は$x = n\pi$(nは整数)のときに 0 となるので、因数定理のようなもの（正確には無限積展開と呼ばれる）を用いて、

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\cdot\cdot$$

$$= \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{1}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{1}{16\pi^2}\right)\cdot\cdot\cdot \qquad (2)$$

ここで(1)と(2)の係数を比較すると、

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{16\pi^2}+\cdot\cdot\cdot\right) = -\frac{1}{3!}$$

つまり、

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

なぜかこの問題に対していきなり$\sin x$という関数を用意するという発想、また無限の積に展開するというオイラーさんの発想には驚かされるばかり…

バーゼル問題の拡張

今回はkの次数が 2 の場合について求めたが、同様にして

kの次数が 4 の時は $\frac{\pi^4}{90}$

kの次数が 6 の時は $\frac{\pi^6}{945}$ とわかる。

また次数が 3 以上の奇数のものに関しては未解決問題である。
また次数を複素数まで拡張したものはゼータ関数と呼ばれ、素数の分布と関係しているらしい。

---

[i] マクローリン展開についてはここで詳しく説明することはできないので興味のある人は調べてみてください。微分の知識さえあれば理解できます。

紙が折り成す高次方程式

2-G(36) 松尾 泰成

0 はじめに

まず、この部誌を手に取り、そしてこのページを開いていただき誠にありがとうございます。去年の文化祭 2 日目に、先輩のお誘いを受けて数研に入ったので、今回が初めての執筆となります。私自身数学は好きですが、かといって数学の事象を誤解の無く、かつ分かりやすく書ける、ということでは全くございません。そのため、ところどころ至らない点あると思いますが、どうか最後まで読んでいただけると、私としては非常にうれしいです。どうぞよろしくお願いします。

1 「折り紙」という作図道具

1-1 二次方程式の解き方

みなさんは、二次方程式をどのようにして解きますか。二次方程式は中 3 で習う内容なので、簡単に説明すると、最高次数が 2 である方程式のことを指し、

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0) \tag{1.1}$$

で表されます。ここで、$a\neq 0$という条件は非常に重要です。なぜなら$a=0$のとき、(1.1) は

$$bx+c=0 \tag{1.2}$$

と一次方程式になってしまうためです。では、この話をしたついでに、以下の問題をウォーミングアップ程度に解いてみましょう。ただし、いわゆる「解の公式」を使ってはいけません。

問題 1

> a,b,cをそれぞれ実数としたとき、xの**方程式**
> $$ax^2+bx+c=0 \tag{1.3}$$
> を解け。

解答 1 ※数Ⅰの知識を必要とします。

$a\neq 0$のとき、(1.3) より、

$$ax^2+bx=-c$$

平方完成し、

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

分母の$\sqrt{4a^2}$は$\pm 2a$だが、どちらの場合も、

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

が成り立ち、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=0$のとき、(1.3) 式より、

$$bx=-c$$

さらに$b\neq 0$のときとそうでないときで場合分けすると、

$b\neq 0$のとき、

$$x=-\frac{c}{b}$$

$b=0$のとき、$c\neq 0$でxは解なし、$c=0$でxは全ての実数となる。

以上をまとめると、

$$\boldsymbol{x=\begin{cases}\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & (a\neq 0)\\ -\dfrac{c}{b} & (a=0,b\neq 0)\\ \text{解なし} & (a=0,b=0,c\neq 0)\\ \text{全ての実数} & (a=0,b=0,c=0)\end{cases}}$$

いかがでしたか？$ax^2+bx+c=0$という単純な式とはいえ、なかなか奥深いものを感じたのではないでしょうか。問題文でxの**二次方程式**とされていれば場合分けは必要ないのですが、今回はxの**方程式**で次数が指定されていないので、このように解答する必要があります。

さて、「代数的に」解くならばこのようになりますが…実は、「幾何的に」解く方法が存在します。

それが、「**折り紙**」です。

…何言ってんだ、って感じですよね。いきなりこんなこと言われても意味わからないと思うので、まずは折り紙の性質について軽く紹介しておきましょう。

1-2 折り紙の公理

「折り紙幾何学」と呼ばれる数学の分野において広く利用されている規則に、「折り紙の公理」と呼ばれるものが存在します。折り紙の公理は 1989 年に Jacques Justin によって発見され、藤田文章氏が『7 つの公理』を再度発見（公理 7 は羽鳥公士郎氏により）しました。以下にその定理を示します。

折り紙の公理(Huzita–Hatori axioms)

O1. 2 点p_1,p_2が与えられたとき、2 点を通るただ 1 つの折り方がある。
O2. 2 点p_1,p_2が与えられたとき、p_1をp_2に重ねるただ 1 つの折り方がある。
O3. 2 本の直線l_1,l_2が与えられたとき、l_1をl_2に重ねるような折り方がある。
O4. 1 点p_1と 1 本の直線l_1が与えられたとき、l_1に垂直でp_1を通るただ 1 つの折り方がある。
O5. 2 点p_1,p_2と 1 本の直線l_1が与えられたとき、p_1をl_1上に重ね、p_2を通る折り方がある。
O6. 2 点$p_1,p_2$2 本の直線l_1,l_2が与えられたとき、p_1をl_1上に重ね、かつp_2をl_2上に重ねる折り方がある。
O7. 1 点pを 2 本の直線l_1,l_2が与えられたとき、pをl_1に重ね、l_2に垂直な折り方がある。

これらの公理は直交座標を用いて証明することができますが、ここでは長くなってしまうので割愛します（興味がある方は参考文献から）。では、これらの作図がどのような操作に該当するのかを見ていきましょう(図 1)。※この記事の終わりに、自ら折り紙を折れるテンプレートを用意しました。テンプレートがあるものには E1 という様に記号を振ってあります。家に帰ったらぜひ切って試してください。

O1. 2 点p_1,p_2を通る直線を引く。
O2. 2 点p_1,p_2を端点とする線分の垂直二等分線を引く。
O3. 直線l_1,l_2が成す角の 2 等分線を引く。
O4. 点p_1を通り、直線l_1に垂直となる線を引く。
O5. 点p_1を焦点、直線lを準線とする放物線に対し、点p_2を通るような接線を引く。[1]
O6. 点p_1を焦点とし直線l_1を準線、点p_2を焦点とし直線l_2を準線とする放物線の共通接線を引く。
O7. 点pを焦点、直線l_1を準線とする放物線に対し、直線l_2と垂直な接線を引く。

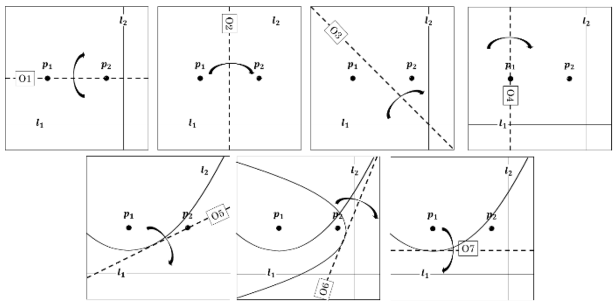


図 1　折り紙の公理 O1~O7 E1

---

[1] 勘の良い人なら気づいたかもしれませんが、放物線の接線は 2 本引ける場合と、1 本引ける場合と、1 本も引けない場合があります。そのため、点p_2の場所により折り方も 0~2 通りが存在します。

O1~O4 はなじみ深いですが、O5~O7 はかなり難しいと思います。放物線の準線や焦点は数学 C の範囲ですが、概念自体はそこまで難しいものではありません。以下の問題とともに解説します。

問題 2

> 直線$l: y = -p$、点 $P(0, p)$が与えられたとき、直線lと点 P からの距離が等しい点の集合は、放物線となることを証明せよ。ただし、yがx^2に比例することを示せば、放物線であることを証明できるものとする。

解答 2　※数学 II の知識を必要とします。

条件を満たす点を(X, Y)とすると、直線lとの距離は$|Y + p|$、点 P との距離は$\sqrt{X^2 + (Y - p)^2}$であるから、これらが等しいとき、

$$\sqrt{X^2 + (Y - p)^2} = |Y + p|$$

辺々2 乗し、

$$X^2 + (Y - p)^2 = Y^2 + 2pY + p^2$$

$$X^2 = 4pY$$

$$Y = \frac{X^2}{4p}$$

よって示された■

この問題 2 において、直線lを放物線の**準線**、焦点 P を放物線の**焦点**と言います。つまり、放物線は「1 本の直線と 1 点が与えられたとき、直線と点の距離が等しい点の集合」と言い換えることができます。なお、問題 2 では原点を通る放物線のみについて証明しましたが、この放物線を平行移動すれば原点を通らないものについても同様の議論が可能です。

少し話がそれましたが、結局折り紙を使えば、直交座標において描画される様々な直線を作ることができる、と理解していただければ幸いです。

では、この折り紙の公理を使い、直交座標、さらには四則演算の説明まで発展させようと思います。

2 折り紙と代数の融合

2-1 直交座標

まずは紙の上に、直交座標を作ってみましょう（図 2：図内の番号は文章中のものと対応しています)。

任意の場所に、x軸に相当する直線を折ります。次に、x軸上に任意の原点 0 と単位点 1 をとります。

①次に、公理 O4 よりこの原点 0 を通り、x軸に垂直な直線が折れるので、この直線をy軸とします。
②そして、公理 O3 よりx軸とy軸を重ねるように折り目を付けます。
③公理 O4 より、単位点 1 を通りこの折り目に垂直な直線を折ることができ、この折り目とy軸の交点は、原点との距離が 1 となっています。この点がy軸における単位点となります。…(＊)

こうして、任意の点の座標が表現できるようになりました。では、次に四則演算の話に発展しましょう。まずは加減についてです。

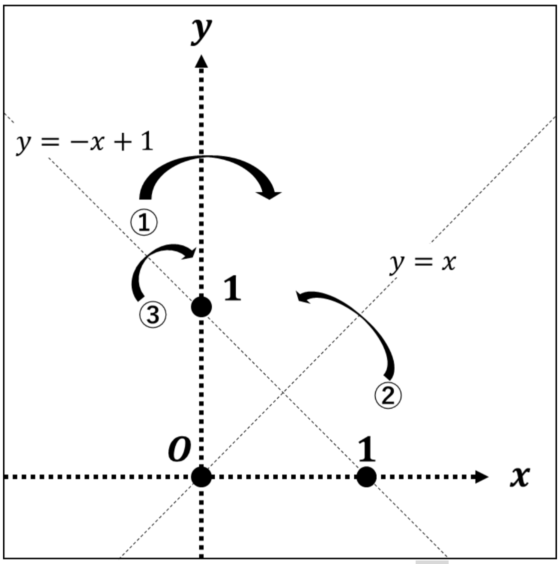


図 2　直交座標の作成　E2

2-2 四則演算（加減）

x軸上に 2 点a,bが与えられたとき、$a+b,a-b$に対応する点をx軸上に取ることを考えます。

①まず、2-1(∗)と同様にして、点bをy軸上に移すことが可能です。

②公理 O4 よりこの移した点を通ってy軸に垂直な直線を折れ、この直線は$y=b$となります。…(∗)

③次に、2-1 で導いた 2 点$(0,1)$, $(1,0)$を端点とする直線の垂直二等分線を、公理 O2 より折ることができます。この直線は$y=x$に該当します。

④点aを通り$y=x$に垂直な直線を折り、

⑤さらにそれに垂直な直線を点aから引くことで、それぞれ$y=\pm(x-a)$を折ることができます。

この直線と$y=b$の交点のx座標が$a+b,a-b$（複合同順）となります。この 2 つの交点を通り、x軸に垂直な直線を引くことで、それぞれがx軸上の点$a-b,a+b$となります。

これにより、紙の上で「加減」を折ることができました。次は乗除ですね。

※途中から面倒くさい＋わかりづらくなったので、使う公理は省略しています。

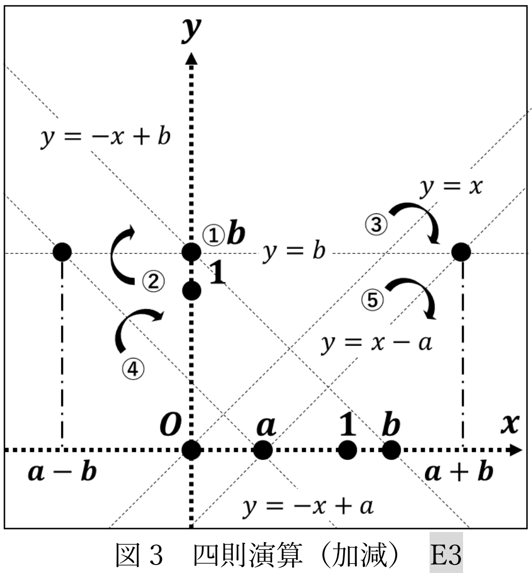


図 3　四則演算（加減）　E3

2-3 四則演算（乗除）

①2-2(∗)までは同様で、ここから$ab,\frac{b}{a}$に対応する点を軸上に取ることを考えます。

②単位点 1 を通り、x軸に垂直な直線を折ることで$y=b$との交点は(1,b)となります。

③これと原点を通る直線は$y=bx$と表されるので、$x=a$との交点は(a,ab)となります。よって、直線$y=ab$を折ることができ、それとy軸の交点を求めることで、abに対応する点をy軸上に取れます。

④同様にして、$x=a$と$y=b$との交点と原点を通る直線は$y=\frac{b}{a}x$となります。

⑤この直線$y=\frac{b}{a}x$と直線$x=1$の交点のy座標が$\frac{b}{a}$となります。

では、ここまで来たところで、皆さんお待ちかね高次方程式を折り紙で解いてみましょう。

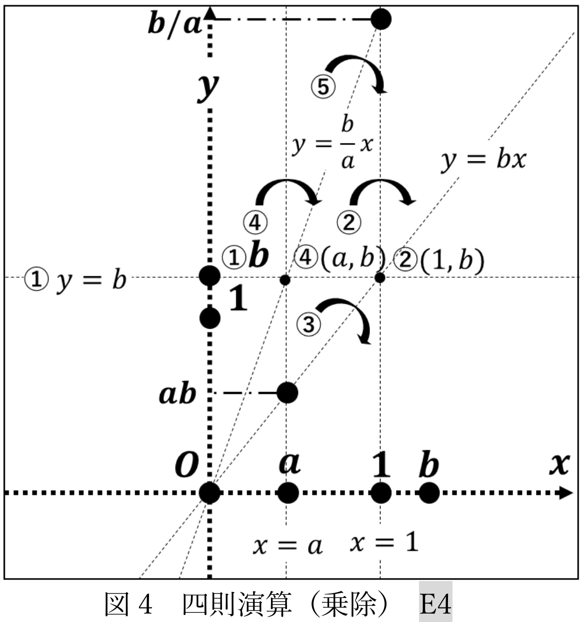


図 4　四則演算（乗除）　E4

3 折り紙で高次方程式を解く

3-1　2 次方程式

一次方程式$ax+b=0\ (a\neq 0)$の解は$x=-\frac{b}{a}$となりますが、これはすでに 2-3 で折り目の傾きとして求められていますから、二次方程式から考えていきましょう。

まず、2-1 に示した方法により直交座標を作成し、任意の 2 点$(0,a),(-b,c)$をとります（$a\neq 0$）。①次に、$-a$を$0-a$の引き算と見ることで$(0,-a)$をとり[2]、$y=-a$を作れます。そのため、公理 O5 における点p_1を$(0,a)$、点p_2を$(-b,c)$、直線lを$y=-a$とすることで、「焦点を$(0,a)$、準線を$y=-a$とする放物線に対し、$(-b,c)$を通る接線」を折ることができます。この折り目の傾きが、二次方程式$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$の解となります。

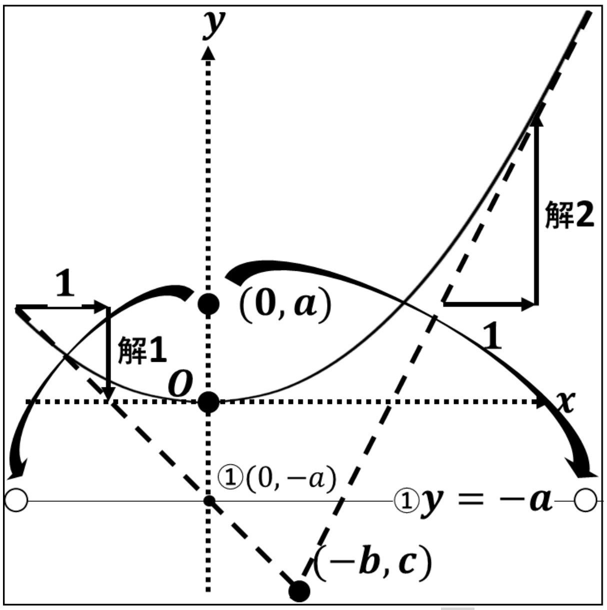


図 5　2 次方程式を解く　E5

…といっても意味わからないですよね（分かったら天才？）。私も書きながら混乱してきました。

ということで証明をするのですが、私がここで長々と解説するのも飽きてしまうと思うので、まずは皆さんの頭で考えてみて下さい。少し複雑ではありますが、そんなに難しいものではないと思います。

問題 3

上述の折り方で、$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$の解が求まることを証明せよ。

解答 3　※数 II の知識を必要とします。

条件より、放物線の式は（問題 2 参照）

$$y=\frac{x^2}{4a} \tag{3.1}$$

ここで、この放物線に対し、接線が 1 本または 2 本引けるときの点$(-b,c)$の存在範囲を求める。

（3.1.）の導関数は、

$$y'=\frac{x}{2a} \tag{3.2}$$

だから、接点を $\mathrm{Q}\left(q,\frac{q^2}{4a}\right)$とすると、接線の式は、

$$y=\frac{q}{2a}(x-q)+\frac{q^2}{4a} \tag{3.3}$$

これが$(-b,c)$を通るとき、

$$c=-\frac{q}{2a}b-\frac{q^2}{4a}$$

$$q^2+2bq+4ac=0 \tag{3.4}$$

この式を満たす実数qが存在するためのb,cの条件は、(3.4)の判別式が 0 以上のときであるから、

$$b^2-4ac\geq 0$$

$$c\leq\frac{b^2}{4a} \tag{3.5}$$

---

[2] 具体的には、x軸とy軸を重ねることで$y=x$を作り、これに垂直で$(0,a)$を通る$y=-x+a$を作る。x軸との交点は$(0,a)$で、この点から$y=-x+a$に垂直な直線を折ることで、y軸との交点に$(0,-a)$を得る。

つまり、点$(-b,c)$が放物線よりy軸の負の側または周上にあるときである。以下では、b,cが(3.5)で示した条件を満たすものとして考える。

点 $\mathrm{Q}\left(q,\frac{q^2}{4a}\right)$で放物線に接する接線の傾きは(3.2)より$\frac{q}{2a}$だから、$\frac{q}{2a}=t$とする。これを(3.4)に代入し、

$$(2at)^2+2b\cdot 2at+4ac=0$$

$$at^2+bt+c=0$$

$a\neq 0$より、このtの 2 次方程式の解は、問題文中に示されたxの 2 次方程式$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$の解に等しい。よって、題意は示された（ただし、b,cは(3.5)式を満たす）■

これですっきりしました。ここで、いくつか補足をします。

点$(-b,c)$が放物線よりy軸の負の側にあるとき、条件を満たす接線は 2 本あります。これは示された 2 次方程式が解を 2 つ持つことと対応しており、解が 1 つのとき、1 つもないときも同様です。

また、傾きの値は少々分かりづらいですが、$x=1$と接線の交点のy座標は傾きの値と等しくなるので、このようにして求めればよいでしょう。他にも何通りかあると考えられます。

やっと 2 次方程式を折り紙で解くことができました。ここまで長かったですね。しかし、私はまだ満足していません。この記事のタイトルからも、章のタイトルからもお察しいただける通り、次は 3 次方程式を解いていきましょう。

3-2　3 次方程式

3 次方程式と言えど、行うことはそこまで変わりません。

3-1 と同じように直交座標を作り、2 点$(0,a),(-b,c)$の他に点$(d,0)$をとって、直線$y=-a$を作ります。$(a\neq 0,d\neq 0)$

dの長さが与えられているので、2-2 に書いた方法を行うことで、点$(-b+d,c)$をとれるほか、直線$x=-b-d$を作れます。

これらより、公理 O6 のp_1を$(0,a)$、p_2を$(-b+d,c)$、l_1を$y=-a$、l_2を$x=-b-d$とすることで、「点$(0,a)$を焦点とし直線$y=-a$を準線、点$(-b+d,c)$を焦点とし直線$x=-b-d$を準線とする放物線の共通接線」を折れます。そして、この傾きが 3 次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$の解の 1 つとなります。

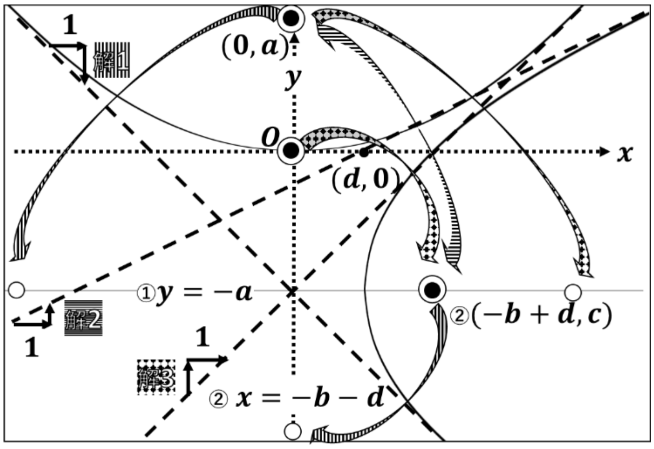


図 5　3 次方程式を解く※ごちゃごちゃしてすいません。　E6

…と言ってもやはりいまいちピンときませんよね。

そこで、2 次方程式のときと同じく証明してみます。ただし、今回は少し難しいので頑張って下さい。

問題 4

> 上述の折り方で、$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0,d\neq 0)$の解が求まることを証明せよ。

解答 4　※数学 III の知識を必要とします。

3 次関数は必ず 1 つ以上の解を持つので、a,b,c,dが満たす条件は、$a\neq 0$以外に存在しない。

点$(0,a)$を焦点とし直線$y=-a$を準線とする放物線を$p_1: 4ay=x^2$、点$(-b+d,c)$を焦点とし直線

$x=-b-d$を準線とする放物線を$p_2: 4d(x+b)=(y-c)^2$とする。

また、共通接線の一つを$y=tx+m$とし、p_1, p_2との接点をそれぞれ$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$とおく。

放物線p_1の式をxについて微分すると、

$$y'=\frac{x}{2a}$$

より、

$$t=\frac{x_1}{2a} \tag{3.6}$$

また、放物線p_1の式より、(3.6)も踏まえ、

$$y_1=\frac{x_1^2}{4a}=at^2 \tag{3.7}$$

よって、mをa, tを用いて表すと、(3.6), (3.7)より、

$$m=y_1-tx_1$$

$$m=at^2-2at^2=-at^2 \tag{3.8}$$

これと同じようなことを放物線p_2でも行う。

放物線p_2の式を$d\neq 0$に注意して変形させ、

$$x=\frac{(y-c)^2}{4d}-b=f(y) \tag{3.9}$$

とする。$x=f(y)$の逆関数を$y=f^{-1}(x)$とすると、求めるべきは

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

である。そのため、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{df(y)}{dy}} \tag{3.10}$$

ここで、(3.9)より

$$\frac{df(y)}{dy}=\frac{y-c}{2d}$$

であるから、(3.10)は、

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{2d}{y-c} \tag{3.11}$$

なお、この式は接点のy座標がcのとき（つまり放物線p_2の頂点のとき）成り立たないが、放物線p_2の頂点の接線は明らかに放物線p_1の接線とはならないので、この場合$y\neq c$としてよい。

よって、接線の傾きtは、(3.11)より

$$t=\frac{2d}{y_2-c} \tag{3.12}$$

であり、これより、

$$y_2=c+\frac{2d}{t} \tag{3.13}$$

なお、$y\neq c$と同じく、$t=0$のとき直線は放物線p_2の接線となり得ないので、$t\neq 0$としてよい。

また、(3.9)より、

$$x_2=\frac{(y_2-c)^2}{4d}-b$$

であるから、(3.13)より、

$$x_2=\frac{\left(\frac{2d}{t}\right)^2}{4d}-b=\frac{d}{t^2}-b \tag{3.14}$$

よって、(3.13), (3.14)よりmを求めると、

$$m=y_2-tx_2$$

$$m=c+\frac{2d}{t}-\frac{d}{t}+bt$$

$$m=bt+c+\frac{d}{t} \tag{3.15}$$

以上より、(3.8), (3.15)から、

$$m=-at^2=bt+c+\frac{d}{t}$$

$$at^3+bt^2+ct+d=0$$

$a\neq 0$より、このtの 3 次方程式の解は、問題文中に示されたxの 3 次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0(d\neq 0)$の解に等しい。よって、題意は示された■

いくつか補足をします。

まず、3 次方程式の場合は点の存在範囲に関する条件がありませんでしたが、点の存在する位置によって解の個数（共通接線の本数）は変わってきます。具体的には、3 次方程式の判別色をDとすると、

・$D>0$を満たすとき 3 個の解を持ち、即ち共通接線は 3 本引ける

・$D=0$を満たすとき 2 個の解を持ち、即ち共通接線は 2 本引ける

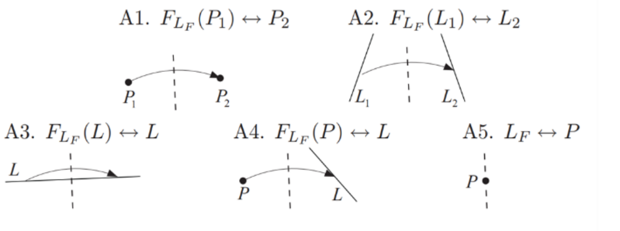
・$D<0$を満たすとき 1 個の解を持ち、即ち共通接線は 1 本引ける

となります。因みに、ここでは証明は割愛しますが、3 次方程式の判別式は$-4ac^3+27a^2d^2+b^2c^2*18abcd-ab^3d$という複雑な式で与えられることが知られています。

また、解答 4 では逆関数の微分法を用いましたが、yをxでそのまま微分しても解けないことはないです。しかし、式が煩雑になってしまうのでこのような解き方をしています。

3-3　5 次以上の方程式は解けない？

さて、3 次方程式までは何とか今までの折り方を踏まえて解くことができました。これまで扱ってきた公理 O1~O7 の折り方は、1 回で 1 つだけ折り目をつける「単純折り」と呼ばれるものであり、ラング氏により単純折りはこの 7 種類しか存在しない、ということが証明されました。具体的には、ラング氏は「アラインメント」という、これ以上分解できない基本操作が単純折りには 5 種類あるとし、これ等の組み合わせで表現される折り方は 7 種類しかないことを突き止めたのです。



	$F_{L_F}(L_1) \leftrightarrow L_1$	$F_{L_F}(P_1) \leftrightarrow L_1$	$L_F \leftrightarrow P_1$
$F_{L_F}(L_2) \leftrightarrow L_2$	N/A	O7	O4
$F_{L_F}(P_2) \leftrightarrow L_2$	O7	O6	O5
$L_F \leftrightarrow P_2$	O4	O5	O1

※A1はO2、A2はO3を行っていることと等しい。

図 7　単純折りにおけるアラインメントとその組み合わせ[3]

これにより、単純折りによって 3 次方程式（したがって 4 次も）は解けるものの、5 次方程式は解けない、という単純折りの限界が明らかになりました。

…では、これで 5 次以上の方程式はもう解けないのでしょうか？いいえ、それはあくまで単純折りだけで折り紙を折った場合で、「多重折り」という折り方を導入すればさらに高次の方程式を解けることが、ラング氏によって証明されました。「多重折り」とは、単純折りとは対照に、同時に複数の折り目を付ける折り方のことを指します。

加えて、ラング氏はアルペリン氏とともに 2 重折りに対するアライメントが 10 種類であることを突き止め、すべての 2 重折りがこれらの組み合わせで表現されることが分かりました。3 重折り以降も同じように考えることができ、こうして多重折りの定式化が実現したのでした。

では、実際にn次方程式を解いてみましょう。ただ、それには「リルの解法」と呼ばれる、高次方程式を幾何的に解く方法を知っておく必要があるので、先にリルの解法について触れていきます。

3-4　リルの解法

リルの解法は、19 世紀にオーストリアのエドアルト・リルによって発見されました。

1 変数多項式方程式$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0(a_i\neq 0, i=0,1,\cdots n)$の実数解は、以下に示した方法で導出できます。

まず、原点 O を始点とし、$a_n>0$のときx軸上の正の方向に、$a_n<0$のときx軸上の負の方向に長さ$|a_n|$だけすすみ、この点をP_1とします。なお、$a_n=0$のときはその場に留まります。

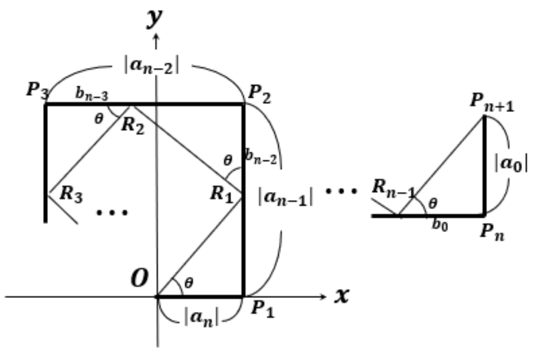
[3] Roger C. Alper, Robert J. Lang 2015. *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms* pp.6,7 https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/o4_multifold_axioms.pdf より図を引用。

次に、反時計回りに 90° 回転し、長さ$|a_{n-1}|$だけすすみ、この点をP_2とします。なお、$a_{n-1} < 0$のとき逆向きに進み、$a_{n-1} = 0$のときは回転してその場に留まります。

この操作を繰り返して点P_{n+1}まで作れたら、点 O から出発して各直線$OP_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}P_n$で 90° 曲がり、点$P_{n+1}$に到達するような経路を描き、曲がった地点をそれぞれ$R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}$とします。

ここで、$\angle P_1OR_1 = \theta$とすると、$x = -\tan\theta$がこのn次方程式の解の 1 つとなっています。なお、nが奇数の場合は実数解が 1 つ存在するので、O からP_nへの経路も少なくとも 1 本存在しますが、nが偶数の場合は実数解が 1 つも存在しないこともあるので、O からP_nへの経路が 1 本も存在しないこともあります。

$a_i > 0\ (i = 0, 1, \cdots n)$のとき



$a_0 > 0, a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$のとき

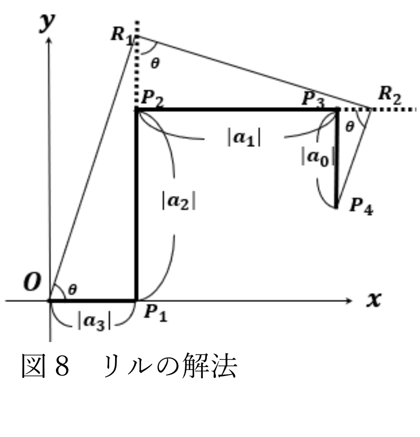


図 8　リルの解法

では、例のごとくこれを証明してみましょう。

問題 5

リルの解法において、$x = -\tan\theta$が 1 変数多項式方程式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 (a_i \neq 0, i = 0,1, \cdots n)$の実数解の 1 つとなることを証明せよ。ただし、$a_i > 0\ (i = 0,1, \cdots n)$としてよい。

解答 5　※数学 B の知識を必要とします。また、探してもそれらしい解答がなかったので、間違いがあるかもしれません。

$R_1P_2 = b_{n-2}, R_2P_3 = b_{n-3}, \cdots, R_{n-1}P_n = b_0$ とする。

$\angle P_1OR_1 = \angle P_2R_1R_2 = \cdots = \angle P_nR_{n-1}P_{n+1} = \theta$　となるから、

$$\tan\theta = \frac{P_1R_1}{OP_1} = \frac{P_2R_2}{R_1P_2} = \cdots = \frac{P_nP_{n+1}}{R_{n-1}P_n}$$

$$\tan\theta = \frac{a_{n-1} - b_{n-2}}{a_n} = \frac{a_{n-2} - b_{n-3}}{b_{n-2}} = \cdots = \frac{a_0}{b_0} \quad (3.16)$$

以下、$\tan\theta = t$とおく。

ここで、明らかに$t \neq 0$より、

$$b_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \frac{a_{j-i}}{t^{i+1}} \quad (3.17)$$

と表されることを証明する$(n - 2 \geq j)$。

(I) $j = 0$のとき

(3.16)より$t = \frac{a_0}{b_0}$なので、

$$b_0 = \frac{a_0}{t_0}$$

これは(3.17)を満たす。

(II) $j = k + 1$のとき

$j = k (n - 3 \geq k)$で(3.17)が成り立つと仮定すると、

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{a_{k-i}}{t^{i+1}} \quad (3.18)$$

$j = k + 1$のとき、(3.16)より、

$$\frac{a_{k+1} - b_k}{b_{k+1}} = t$$

$$b_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{t} - \frac{b_k}{t}$$

(3.18)より、

$$b_{k+1} = (-1)^0 \frac{a_{k+1}}{t^{0+1}} + (-1) \cdot \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{a_{k-i}}{t^{i+1}}$$

$$b_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \frac{a_{k+1-i}}{t^{i+1}}$$

これは(3.17)を満たすので、(3.17)は$n-2 \geq j$を満たす全ての自然数jで成り立つことが示された。

よって、(3.16)より、

$$t = \frac{a_{n-1} - b_{n-2}}{a_n}$$

$$a_n t - a_{n-1} + b_{n-2} = 0$$

(3.17)より、

$$a_n t - a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{t} - \frac{a_{n-3}}{t^2} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{a_0}{t^{n-1}} = 0$$

$$a_n t^n - a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} - a^{n-3} t^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-2} a_0 = 0$$

$$a_n t^n - a_{n-1} t^{n-1} + +a_{n-2} t^{n-2} - a^{n-3} t^{n-3} + \cdots + (-1)^n a_0 = 0$$

$$a_n (-t)^n + a_{n-1} (-t)^{n-1} + a_{n-2} (-t)^{n-2} + a^{n-3} (-t)^{n-3} + \cdots + a_0 = 0$$

よって、このtの 1 変数多項式方程式の解は、問題文中に示された 1 変数多項式方程式$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 (a_i \neq 0, i = 0,1, \cdots n)$の解に等しい。よって、題意は示された■

最終的に導かれる方程式の解は、$-\tan\theta$となっていることに注意です。

また、今回は予め$a_i > 0$ $(i = 0,1, \cdots n)$としましたが、このうちどれかが 0 または負だったとしても、同様の議論が可能です。

では、リルの解法について分かったところで、ついにn次方程式を解いてみましょう。ここでは、そのうちもっとも簡単な 5 次方程式について扱うこととします。

3-5　5 次方程式

3-4 で紹介したリルの解法を応用することで、「高々$(n-2)$重折りによって一般のn次方程式を解くことができる$(n \leq 3)$」ことが知られています。つまり、$n = 5$であれば、3 重折りによって解くことができると予想できるでしょう。

では、以下に手順を示します。

5 次方程式$x^5 + ax^4 - bx^3 + cd^2 + dx - e = 0$が与えられているとします（わかりやすくするために係数の正負の符号を恣意的に変えているほか、x^5の係数を簡単のために 1 とします)。

まず、点$P(0,-1)$および直線$l_1: y = 1$を描きます。

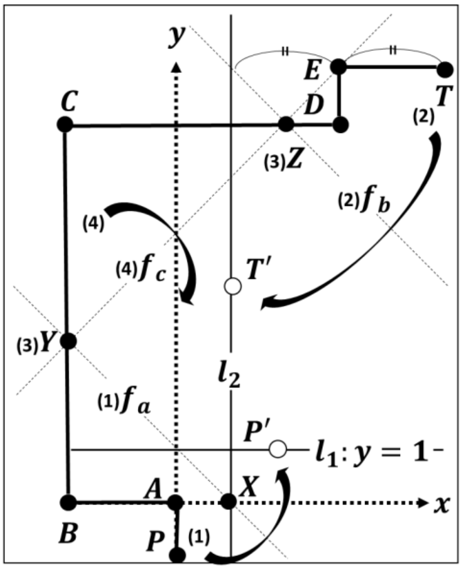
次に、原点に点 A をとり、線分の長さが各係数の値になるように折れ線 ABCDET を描きます。係数がマイナスの場合は、逆向きに進むことに注意してください。また、始点は原点ではなく P とし、$AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, ET = e$（全て正）とします。そして、点 E から線分 ET とは逆の方向にeだけ進んだ位置に、直線l_2を線分 ET に垂直になるように（つまりy軸と平行になるように）引きます。

そうしたら、次の条件をすべて満たすように 3 つの折り目f_a, f_b, f_cを付けます。

(1) 折り目f_aによって、点 P が直線l_1上に重なる
(2) 折り目f_bによって、点 T が直線l_2上に重なる
(3) 折り目f_aと線分 BC との交点 Y、および折り目f_bと線分 CD との交点 Z の両方を折り目f_cが通る
(4) 折り目f_cによって、折り目f_aおよび折り目f_bがそれぞれ自分自身に重なる

このとき、折り目f_aとx軸との交点 X が、与えられた方程式の解となります。

…これは本当に複雑です。3 重折りをしているのは(1)~(4)の網掛け部分であり、一度の手順でf_a, f_b, f_cという 3 つの折り目がついていることがわかります。



※筆者の作図能力の低さのせいでl_2とx軸の交点がXとなっているように見えるが、f_aとx軸の交点であることに注意

図９　５次方程式を解く　E7

では、これを証明してみます。リルの解法を証明したので、正直この証明はそこまで重要ではないですが、念のため成り立つことを確認しておきます。

問題６

上述の折り方で、$x^5+ax^4-bx^3+cd^2+dx-e=0$の解が求まることを証明せよ。

解答６　※数学Ⅰの知識を必要とします。

問題５と同様に、曲がった地点をR_1, R_2, R_3, R_4とし、$\tan\theta = t$とする。すると、$AR_1 = t$

また、$BR_2 = p, CR_3 = q, DR_4 = r$とする。

相似の性質より、

$$t = \frac{p}{a+t} = \frac{q}{b-p} = \frac{r}{c-q} = \frac{e}{d+r}$$

が成り立つ。これを右側から順番に計算してp, q, rを消去すると、

$$r = -d + \frac{e}{t}$$

より、

$$\frac{-d+\frac{e}{t}}{c-q} = t$$

$$q = c + \frac{d}{t} - \frac{e}{t^2}$$

見覚えのある式になってきましたね。更に計算を続け、

$$\frac{c+\frac{d}{t}-\frac{e}{t^2}}{b-p} = t$$

$$p = b - \frac{c}{t} - \frac{d}{t^2} + \frac{e}{t^3}$$

より、

$$t^2 + at - p = 0$$

$$t^2 + at - b + \frac{c}{t} + \frac{d}{t^2} - \frac{e}{t^3} = 0$$

$$t^5 + at^4 - bt^3 + ct^2 + dt - e = 0$$

このtの５次方程式の解は、問題文中に示されたxの５次方程式$x^5+ax^4-bx^3+cd^2+dx-e=0$の解に等しい。よって、題意は示された■

このように、必ずしも問題５に示したような点のとり方でなくても、５次以上の高次方程式を解くことができます。また、６次、７次と方程式の次数が多くなったとしても、それぞれ４重折り、５重折りを導入することで、折り紙によって解くことができます。勿論、その手順はとんでもなく面倒くさいものですが…。

ちなみに、５次方程式の場合、３重折りでなくても２重折りで解けることがわかっています。さすがにここで書くのは、ページ数が多くなりすぎて会長に怒られるレベルなので省略しますが、参考文献からアクセスできるので、興味がある方は閲覧していただければ幸いです。

4 総括

本記事では、折り紙による高次方程式の解法を紹介しました。

方程式の解の公式は４次までしか作ることがで

きない、つまり5次方程式の解の公式は作ることができないことが証明されていますが、折り紙を使えば解くことができる、というのは何とも興味深い話です。また、ギリシャの3大作図問題の一つである「角の三等分線」をひくことも、コンパスと定規だけでは引くことができないことが証明されていますが、折り紙では引くことができます（これについては今回触れられませんでした…。各自で調べてみてください）。

　このように、折り紙はいわば代数よりずっと広い可能性を持った、すばらしい数学的なツールなのだと私は思っています。今度折り鶴などで折り紙を使うときは、この深遠な数学の世界に、ぜひとも思いを馳せていただければと思います。同時に、ここまで9000文字近くも稚拙な文章を辛抱強く読んで下さり、本当にありがとうございました。

　では、またの機会にお会いできれば幸いです。

※厚かましいお願いとなりますが、お隣10m程のところに地理部の部誌が山積みになっていると思います。もし地理に興味がありましたら、ぜひともご閲覧していただければ非常に嬉しいです（私も執筆しています）。

5 参考文献

最終閲覧は2024年7月14日。
安田享. “未来を解く方程式”. 東京出版. 2023 06. P.38
川部達哉. “折り紙の数理”.
http://www3.u-toyama.ac.jp/sci/topics/math/201211.html
水津雄太.2013.“折り紙の公理による正多角形の作図” ※折り紙の公理の証明が載っています.
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~skaji/slides/student/suidu.pdf
クワトウ・ゴウ.” 折り紙で5次方程式が解けるまでの歩み”.note.
https://note.com/kwatogo/n/n722e4b1816c6
平成 24 年度　上越教育大学公開講座.”折り紙の数学”.pp.11-15.
https://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/openh24origami.pdf
マスオ.” 三次方程式の判別式の意味と使い方”. 高校数学の美しい物語.
https://manabitimes.jp/math/1063
Roger C. Alper, Robert J. Lang 2015. *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms* pp.6,7
https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/o4_multifold_axioms.pdf
“n 次方程式を幾何的に解く(前半)”.QUaver.
https://qu-aver.wixsite.com/quaver/single-post/2017/11/15/n%E6%AC%A1%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F%E3%82%92%E5%B9%BE%E4%BD%95%E7%9A%84%E3%81%AB%E8%A7%A3%E3%81%8F%E5%89%8D%E5%8D%8A

2024年度

高校入試対策模試

数学

６０分　１００点満点

注意

・問題は①から④までで、全部で４ページある。

・試験開始の合図があるまでは、問題用紙を開かないこと。

・解答は全て解答用紙に記入せよ。

・試験終了後、問題用紙は持ち帰ること。

・コンパス、三角定規を使用してもよい。

・時間配分に注意して解き進めること。

・問題文に「全て求めよ」と書かれていなくても答えが複数存在することがある。その点に十分注意せよ。

1 次の各問いに答えよ。

(1) ① $2x^2+7xy+6y^2-22x-40y+56$ を因数分解せよ。

② x、yを自然数とする。$2x^2+7xy+6y^2-22x-40y+56$ が素数となるとき、x、yの値とその時の素数を求めよ。ただし、解答は　例)「$x=1$、$y=0$のとき3」のように答えよ。

(2) 2025^{2025} を17で割った余りを求めよ。

(3)座標平面上に放物線α: $y=x^2$ と点$A(-2\ ,-5)$があり、放物線α上にx座標がtである点Pをとる。

①APの傾きを l と置くとき l を、tを用いて表せ。

② p を実数とし、$f(p)=\frac{p^2+2p+6}{p+3}$ とするとき、$f(p)$の範囲を求めよ。

2 下の図において、4 点 A,B,C,D は円 O の円周上にあり、線分 AC と BD の交点を E とすると、BE $=\frac{5}{7}$, ED $=\frac{44}{7}$, EC $=\frac{55}{14}$ である。また、円 O の円周上にさらに点 P をとると、弧 AB＝弧 PC となり弧 PD に対する中心角は 120° となった。ただし、点 P は線分 AC について点 B と同じ側にとる。この時、次の各問いに答えよ。

(1)①△ABD の面積を求めよ。

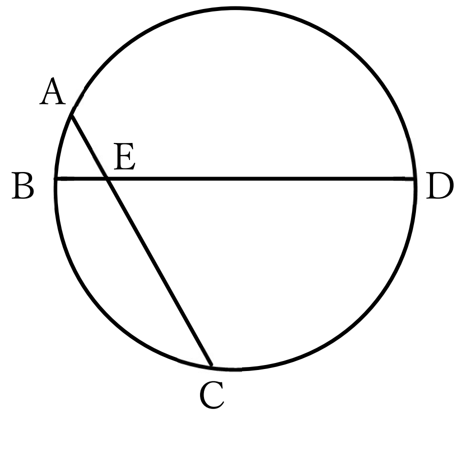
②線分 AB、AD の長さを求めよ。

③∠BCD の大きさを求めよ。

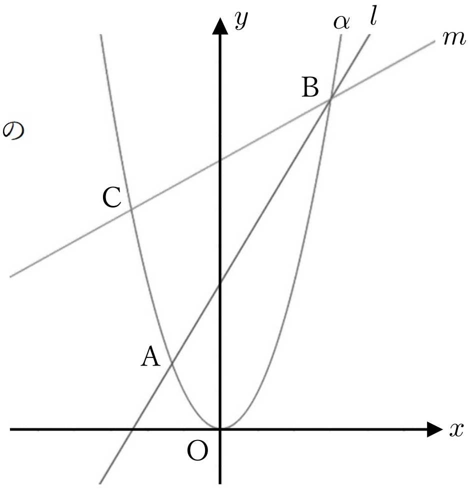
(2)円 O の円周上で、線分 BD に対して点 C と反対側に、点 R を、DR=$\frac{7\sqrt{2}}{2}$となるようにとる。

①線分 RC の長さを求めよ。

②△BRC の面積を求めよ。



3 座標平面上に、放物線α：$y=x^2$ と直線ℓ：$y=\frac{5}{3}x+4$ があり、放物線αと直線ℓの交点をA、Bとする。（ただし、点Aは点Bよりもx座標が小さいものとする。）また、座標平面の原点をOとするとき、直線ℓに対して点Oと反対側に∠ABC＝45°となる点Cをとり、点B、Cを通る直線をmとする。この時、後の問いに答えよ。



⑴①直線mの式を求めよ。また、点Cのx座標を求めよ。

②△OBCと△PBCの面積が等しくなるように点Pを放物線α上の点Oとは異なる位置にとる。点Pのx座標を求めよ。

⑵ 放物線α上に新たに点D$(-2\ ,4)$をとる。

① △ABDの辺上及び内部にある格子点（x座標とy座標がそれぞれ整数である点）の個数を求めよ。

② 線分BDを直径とする円と放物線αのB,D以外の交点を全て求めよ。

4 一辺の長さが2㎝の立方体ABCD—EFGHがある。正方形ABCDの対角線の交点を点Mとし、四角錐M—EFGHをつくる。また、四角錐M—EFGHのすべての面にそれぞれ接している球Oがある。この時、後の問いに答えよ。（渋谷教育学園幕張　改）

⑴△MEFの面積を求めよ。

⑵球Oの半径を求めよ。

⑶4点C、D、E、Fを通る平面で四角錐M—EFGHを切るとき

①点Mを含む立体の体積を求めよ。

②球Oの切断面の面積を求めよ。

2024 年度　高校入試対策模試　数学　解答用紙

$\boxed{1}$

(1)①	②
(2)	
(3)①	②

$\boxed{2}$

(1)①	②AB の長さ AD の長さ
③	
(2)①	②

$\boxed{3}$

(1)①直線mの式	点 C のx座標
②	
(2)①	
②	

$\boxed{4}$

(1)	(2)
(3)①	②

解答

$\boxed{1}$

(1)① $(2x+3y-14)(x+2y-4)$

② $x=3,\ y=3$ のとき 5

(2) 2

(3)① $l=\dfrac{t^2+5}{t+2}$

② $f(p)\leqq -10,\ 2\leqq f(p)$

$\boxed{2}$

(1)① $2\sqrt{3}$

② AB の長さ：1　　AD の長さ：$4\sqrt{3}$

③ 90°

(2)① $\dfrac{11\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{4}$

② $\dfrac{55\sqrt{3}+75}{16}$

$\boxed{3}$

(1)① 直線 m の式：$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{33}{4}$　　C の x 座標：$-\dfrac{11}{4}$

② $x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1\pm\sqrt{1057}}{8}$

(2)① 11 個

② $\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}, \dfrac{11\mp\sqrt{21}}{2}\right)$ (複合同順)

$\boxed{4}$

(1) $\sqrt{5}$ ㎠

(2) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ㎝

(3)① $\dfrac{16}{27}$ ㎤

② $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\pi$ ㎠

2024年度　デジタルハリウッド大学模試

数　学

150分

300点満点

注 意 事 項

壱　コノ模試ハ某寺子屋ノ模試ニオキテ，デジタルハリウツド大學ヲ志望シ，ソノ中ニ高順位ヲ狙フ人ガタメノ模試ナリ.

弐　試ミ終ハリ時刻マデ罷リヲ認メズ．試ミノ中ニ心地ノ悪シクナル等，ヤムヲ得ヌ由ノアルツイデニハ手挙ゲ監督者呼ビ，指示ニ従フコト.

参　試ミ始メノシルシノアルマデ，コノ問ヒ用紙ヲ開クベカラズ.

肆　試ミ始メノ後，解答書紙ノ所定欄ニ，受験番号及ビ氏名ヲ記スコト.

伍　問ヒ草子ニ乱丁，落丁，印刷不明瞭ナル箇所ノアリシツイデ及ビ解答書紙ノ不足セルツイデハ，手挙ゲ監督者ニ申シイズルコト.

陸　問ヒハサナガラ記述式ナリ. 理ノ飛躍ナカルベクネンゴロニ記述シタマヘ.

漆　解答ハサナガラ解答書紙ニ記スコト. 問ヒ草子ノ提出ハ認メズ. 解答書紙ニ問ヒノ番号ヲ記シシ上ニ解答スルコト

捌　問ヒハ一切ニ六題アリ.

玖　満点ハサマ上三百点ナレド，創意工夫ノ満チシ回答ニハ加点スレバ，コノ極ミナラズ.

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．（40 点）

問 1　次の値を求めよ．

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{k!+(n-k)!}\ {}_nC_k$$

問 2　$\frac{2}{3} < \log \pi < \frac{7}{5}$を示せ．ただし$3.14 < \pi < 3.15$とする．

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．（60 点）

$\alpha^{2n+1} = 1\ (\alpha \neq 1)$とし，$a\langle n|p\rangle$を以下の様に定義する．ただし，$n$は自然数,$p$は正の実数とする．

$$a\langle n|p\rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{p+\alpha^k}$$

例えば，$a\langle 2|4\rangle = \frac{1}{4+\alpha} + \frac{1}{4+\alpha^2} + \frac{1}{4+\alpha^3} + \frac{1}{4+\alpha^4} + \frac{1}{4+\alpha^5}$（$\alpha$は$\alpha^5 = 1$を満たす$\alpha$）となる．

(1)　$(2+\alpha)(2+\alpha^2)\cdots(2+\alpha^{2n})$を$n$の式で表せ．

(2)　$a\langle n|1\rangle$をnの式で表せ．

(3)　$a\langle n|2\rangle$をnの式で表せ．

(4)　$\lim_{n\to\infty} a\langle n|p\rangle$を求めよ．

$\boxed{3}$ 疾走線に関する以下の問いに答えよ．（50 点）

原点Oと点$A(1,0)$を結ぶ線分を直径とする円Cと，点Aにおける接線lについて考える．
直線l上に点Nをとり，ONと円Cの交点をKと置く．線分ON上に$OP = KN$となる点Pをとる．
このようにとった点Pの軌跡を疾走線（シッソイド）という．

(1)　Pの軌跡の式を求めよ．

(2)　直線$x+2y=1$と疾走線の交点の座標をQとおく．OQの傾きを求めよ．また，これを利用すれば，ある立方体の 2 倍の体積を持つ立方体が作図可能であることを説明せよ．

(3)　直線$x+y=1$，x軸，疾走線で囲まれる領域の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ． （50 点）

サイコロを3回投げて，出た目を順にa, b, cとし，Sを次のように定義する．

$$S = \sin\frac{b}{a}\pi \sin\frac{c}{b}\pi \cos\frac{a}{c}\pi$$

(1) $S = 0$となる確率を求めよ．

(2) Sが整数となる確率を求めよ．

$\boxed{5}$ 以下の問いに答えよ． （40 点）

例えば，$10 \times 9 \times 8$は3!で割り切れる．また，$7 \times 8 \times 6 \times 4$は4!で割り切れる．このように，連続$n$整数の積は$n!$で割り切れることを示せ．ただし，連続$n$整数は全て自然数とする．

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ． （60 点）

可積分関数$f(t)$に関して，以下の様な積分変換を考える．

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} e^{-st} f(t)\, dt$$

この変換に対して次の性質が成り立つことが知られている．（証明なしに用いて良い．）

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

(1) $f(t) = e^{at}$ (aは定数)に対する積分変換$F(s)$を求めよ．

(2) $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$を示せ．また，$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$を示せ．

(3) $f''(t) + f(t) - 2f(t) = e^{-t}$ ($f(0) = 0$，$f'(0) = 0$)を満たす関数$f(t)$を以下の手順で求めよ．ただし，$s \neq 1, -2$とする．

① $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$と置き，$F(s)$をsの式で表す．

② $F(s)$を$f(t)$の式に戻す．（これは(1)の結果を参考にしても良い．）

問題はこれで終わりである．

デジタルハリウッド大学模試　解答解説及び講評

※難易度はＡ（易）～Ｅ（難）の５段階で評価した．

採点基準は解答中の」（$+n$点）を参照されたし．

$\boxed{1}$　問１（15 点）

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k) \cdots (*)\text{を示す．}$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\\ (\text{右辺}) &= f(n)+f(n-1)+\cdots+f(1)+f(0)\\ &= f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

よって$(*)$は成り立つ．」（＋５点➡注）

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{k!+(n-k)!}\ {}_nC_k$$

と置くと，$(*)$より

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k)!}{(n-k)!+k!}\ {}_nC_{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k)!}{(n-k)!+k!}\ {}_nC_k\end{aligned}$$

である」（＋５点）から，

> ※　前の式変形の補足
>
> $${}_nC_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
>
> $$= \frac{n!}{\{n-(n-k)\}!\,(n-k)!} = {}_nC_{n-k}$$

$$\begin{aligned}2S &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{k!+(n-k)!}\ {}_nC_k + \sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k)!}{(n-k)!+k!}\ {}_nC_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k!+(n-k)!}{k!+(n-k)!}\ {}_nC_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}{}_nC_k = 2^n\end{aligned}$$

である．従って，求めるべき答えは，

$$\boldsymbol{S = 2^{n-1}}$$

である．」（＋５点）

➡注

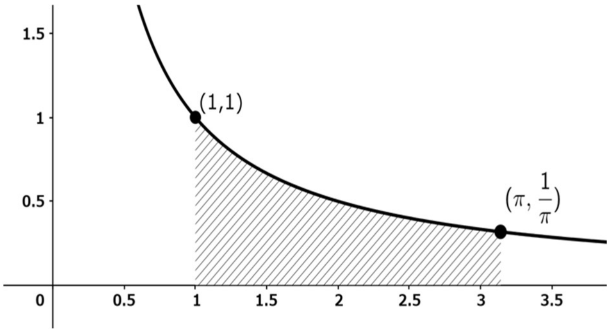
$(*)$は証明がなくとも答えがあっていれば良い．

※部分は書かれていなくても良い．

$\boxed{1}$　問２（25 点）

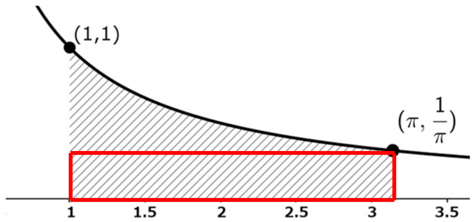
$$\log\pi = \int_1^{\pi}\frac{1}{x}dx$$

より，$\log\pi$は$y=\frac{1}{x}$の1からπまでの面積（斜線部）に等しい．（下図参照）



これを上下から抑えれば良い．」（+7 点）

(i) $\frac{2}{3} < \log\pi$を示す



上図の赤で囲った部分の面積を考え，」（+2 点）

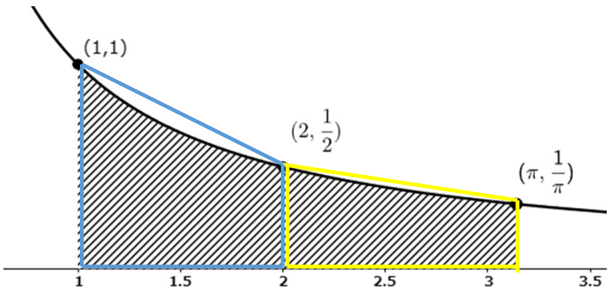
$$1-\frac{1}{\pi} < \log\pi$$

であり，問題の仮定より$3.14 < \pi < 3.15$だから，

$$\frac{2}{3} = \frac{42}{63} < 1-\frac{1}{3.15} = \frac{215}{315} = \frac{43}{63} < \ln\pi$$

より示された．」（+4 点）

(ii) $\log\pi < \frac{7}{5}$を示す



上図の青で囲った部分と黄で囲った部分の面積の和を考え、」（+5 点）

$$\log \pi < \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}$$

であり，問題の仮定より$3.14 < \pi < 3.15$だから，

$$\log \pi < \frac{3}{4} + \frac{3.14}{4} - \frac{1}{3.15} < \frac{3}{4} + \frac{3.14}{4} - \frac{1}{4} = \frac{514}{400} < \frac{7}{5}$$

より示された.」（+7 点）■

【講評】

問 1　難易度 A

自作問題.

総和の対称性に気づけるかどうかの問題.

$(*)$に気づくことができれば簡単な問題だった.

記述も難しくない.

問 2　難易度 C

2007 年の東大理系第 6 問の改題.

$\ln a$と$f(x) = \frac{1}{x}$の面積とのつながりが見抜ければ後はすんなり解けただろう．しかしこの関係を見抜くのは少し難しいため，ここで差がつく問題.

また，（ii）で台形二つに近似しているのは，台形一つの近似だと評価が甘くなってしまうためである．近似がうまくいかなかった時にどう対処するかを見るための問題だった．工夫すれば計算も面倒ではない．制限時間を考慮しても，十分完答が狙える範囲である.

総合して，発想力が問われる小問集合だった.

特に第 2 問目は面積評価に気づかないと計算が重くなり，時間に追われる．問 1 も簡単とはいえ気づかずに時間をかけた人もいるだろう.

こういった問題群では，5 分ごとに，捨てて次の問題にいくのか，粘るのかを逐次判断すると良い.

大問$\boxed{1}$総合して難易度は B

$\boxed{2}$　(1)　（8 点）

αが$z^{2n+1} = 1$の(虚数)解であるため，そこから

$g(z) = z^{2n} + z^{2n-1} + \cdots + z^2 + z + 1$が

$g(z) = (z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{2n})$と表せる.

（解を用いた因数分解）」（+3 点）

したがって,

$$(2+\alpha)(2+\alpha^2)\cdots(2+\alpha^{2n}) = g(-2)$$

となる．よって求めるべき答えは,

$$\begin{aligned} g(-2) &= \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k \\ &= \frac{1 \times (1-(-2)^{2n+1}}{1-(-2)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1+2\cdot 4^n}{3}} \end{aligned}$$

である.」（+5 点）

$\boxed{2}$　(2)　（10 点）

$$a\langle n|1\rangle = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{1+\alpha^k} \cdots (a)$$

である．和の順番を入れ替えて,

$$\begin{aligned} (a) = &\left(\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha^{2n}}\right) + \left(\frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha^{2n-1}}\right) \\ &+ \cdots + \left(\frac{1}{1+\alpha^n} + \frac{1}{1+\alpha^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{1+\alpha^{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

となる.」（+4 点）第k項を取り出して計算すると，$\alpha^{2n+1} = 1$より,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{1+\alpha^k} + \frac{1}{1+\alpha^{2n-k+1}}\right) \\ &= \left(\frac{2+\alpha^k+\alpha^{2n-k+1}}{(1+\alpha^k)(1+\alpha^{2n-k+1})}\right) \\ &= \left(\frac{2+\alpha^k+\alpha^{2n-k+1}}{1+\alpha^k+\alpha^{2n-k+1}+1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

で，最後の項を除いてこれらがn個あるから,

$$a\langle n|1\rangle = 1 \times n + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2}$$

である.」（+4 点）（答えに+2 点）

$\boxed{2}$ ⑶　(21 点)

$u_k = \dfrac{1}{2+\alpha^k}$ と置く．$u_k \neq 0$ であるから，

$2+\alpha^k = \dfrac{1}{u_k}$. 従って，$\alpha^k = \dfrac{1}{u_k} - 2$ である．ここで

$\alpha^{2n+1} = 1$ を利用して，$1 = \left(\dfrac{1}{u_k} - 2\right)^{2n+1}$

である.」(+4 点) よって，u_kは u の方程式

$1 = \left(\dfrac{1}{u} - 2\right)^{2n+1}$ ⋯①の解である．両辺をu^{2n+1}倍

して二項展開し，整理すると，

$(1-2u)^{2n+1} = u^{2n+1}$

$\Leftrightarrow (2^{2n+1}+1)u^{2n+1} - (2n+1)2^{2n}u^{2n} + \cdots + 1 = 0$

である.」(+7 点)

ここで，u_kは①を満たす解であるため，

解と係数の関係より，求めるべき答えは，

$$a\langle n|2\rangle = u_1 + u_2 + \cdots u_{2n+1} = \frac{(2n+1)2^{2n}}{(2^{2n+1}+1)}$$

である.」(+10 点)

$\boxed{2}$ ⑷　(21 点)

⑶と同様に考えて，

$$a\langle n|p\rangle = \frac{(2n+1)p^{2n}}{(p^{2n+1}+1)}$$

$$= \frac{2np^{2n}+p^{2n}}{(p^{2n+1}+1)}$$

である.」(+2 点) 分子分母をp^{2n+1}でわって，

$$a\langle n|p\rangle = \frac{\frac{2n}{p}+\frac{1}{p}}{\left(1+\frac{1}{p^{2n+1}}\right)} \cdots ②$$

となる.」(+2 点)

(i)　$p \geq 1$のとき

②より，

$$\lim_{n\to\infty} a\langle n|p\rangle = \infty$$

である.」(+4 点)

(ii)　$0 < p < 1$のとき

$$a\langle n|p\rangle = \frac{n(\frac{2}{p}+\frac{1}{pn})}{\frac{1}{p^{2n+1}}(1+p^{2n+1})} \cdots ③$$

である．ここで，$0 < p < 1$のときの

$$\lim_{n\to\infty} np^{2n+1}$$

について考える．$p = \dfrac{1}{1+h}$ と置くと，$h > 0$ で，

$(1+h)^{2n+1} \geq \dfrac{1}{2}(2n+1)\cdot 2nh^2$が成り立つので，

$$0 < np^{2n+1} = \frac{n}{(1+h)^{2n+1}} < \frac{1}{nh^2}$$

である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nh^2} = 0$ よりはさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} np^{2n+1} = 0$$

である．従って，③の極限は，

$$\lim_{n\to\infty} a\langle n|p\rangle = \frac{n(\frac{2}{p}+\frac{1}{pn})}{\frac{1}{p^{2n+1}}(1+p^{2n+1})} = 0$$

となる.」(+8 点) ((i)(ii)共に合って+5 点)

【講評】

⑴　難易度 A

$2n+1$乗根に関する複素数の典型問題．計算も重くないため，これはとるべき問題である．

⑵　難易度 B

見慣れない表記で混乱したかもしれないが，これも典型問題である．和の順番を入れ替えて，それぞれを 1 にできることに気がつくかどうかであるが，頻出の形なので知っている人も多いだろう．もしこれに気づかなくとも，⑶の解答のようにすれば，同じように値が求まる．それほど難易度は高くない．

⑶　難易度 D

気づくべきポイントがいくつかあり，難しいが，初手で$u_k = \frac{1}{2+\alpha^k}$と置くのが最大のポイント。

こう置かないと方針が見えない．
しかし，これに気づいても，展開し解と係数の関係を使って総和を求めることが技巧的であり，難所である．たまに使う形ではあるが自分で見抜くのは相当な訓練が必要だろう．難問である．

⑷ 難易度 C
（3）が解ければなんてことは無い極限操作の問題である．pの値で極限値が変わるため，要注意．$p=\frac{1}{1+h}$とおき，はさみうちを使うのは，（よく目にする形ではあるため知っている人は多いだろうが）一度やっておかないと厳しいだろう．とはいえ，⑶が解けた人ならこの問題も難なく解いてしまわれるだろうから，ある種のサービス問題かもしれない．標準的な難易度。

全て自作問題（典型ではある）．
総合して，複素数のn乗根に関する理解度を測る設問である．⑴，⑵はしっかりn乗根がわかっていれば難なく解ける問題であるため，差がつくのは⑶以降だろう．配点の関係上、⑶が解けた人とそうでない人で大きく点が開くため，差をつけるための問題群であるといえる．また，⑷が解ければ⑶，⑵は自動的に解けるため，一般化した物から考えるのも一つの手である．大問の最後の問題は配点が特に高い傾向にあるため，途中の設問が（例えば証明問題などで）解けなかった時でも，結果を利用して，後半の問題が解けないか探ることも得点を伸ばす一つの戦略といえるだろう．

大問$\boxed{2}$総合して難易度は C

$\boxed{3}$ ⑴ （17 点）

$N(1,\tan\theta)\left(-\frac{1}{2}<\theta<\frac{1}{2}\right)$ととる．
円Cの方程式は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

であり，直線OPの式は

$$y=\tan\theta\cdot x$$

で，これらを連立して交点Kの座標を求めると

$K(\cos^2\theta,\sin\theta\cos\theta)$となる．」（+3 点）

条件より，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{KN}$である．$P(x,y)$とすると，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\cos^2\theta\\\tan\theta-\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

となり,」（+3 点）➡注 1

$$x=\sin^2\theta$$

である.」(+1 点)また,

$$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta\cos\theta$$

$$=\sin\theta\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^3\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$ 」（+3 点）

$x=\sin^2\theta$より，上式に代入して，

$$y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$=x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$ 」（+4 点）

辺々2 乗して整理すると，Pの軌跡の式は,

$$x^3+(x-1)y^2=0\cdots①$$

である.」(+3 点)
➡注:
軌跡の式は同値ならどれでも良いが，媒介変数を用いた形は軌跡の式とは言い難い．ここまでで止まってるならば，⑶の積分が正しく求まっている場合に満点を与える．それ以外は減点とする．

$\boxed{3}$ (2) （13 点）

①と$x+2y=1$との交点をQとおくと，
$2y=1-x$となることから，$x^3-2y^3=0$を得る．
よって，

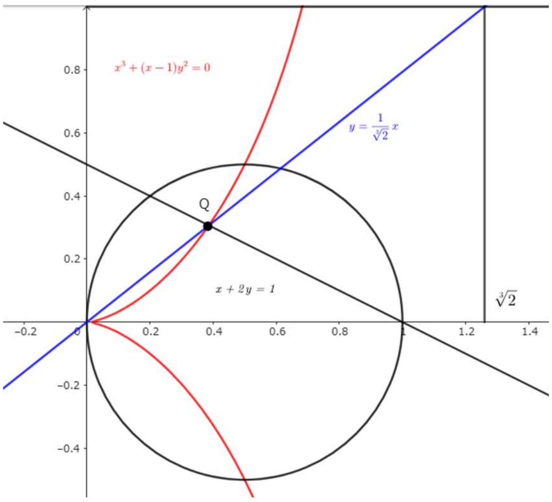
$$x^3=2y^3$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

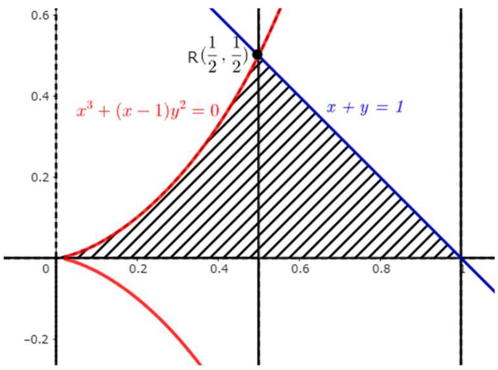
よって直線 OQ の傾きは$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$である.」（+5 点）

（下図参照）



ここで，直線$y=1$とOQの交点のx座標を求めると，$x=\sqrt[3]{2}$であるから，一辺の長さをこの図から写しとって，立方体を作図すれば一辺の長さが1 の立方体の 2 倍の体積の立方体が作図できる．」（+8 点）■

$\boxed{3}$ (3) （20 点）



求めるべき面積は上図の斜線部である．
①と交点$x+y=1$との交点をRとすれば，
$R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$となり，求める面積を S とおけば，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

」（+6 点）

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx\text{と置く．}$$

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx$$

ここで，$u=\sqrt{x}$と変数変換すると，

$$2udu=dx$$

x	0	$\to$	$\frac{1}{2}$
u	0	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$I=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{u^4}{\sqrt{1-u^2}}du$$

また，$u=\sin\theta$と変数変換して，

$$du=\cos\theta\,d\theta$$

u	0	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

よって，

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta\,d\theta$$

半角の公式を用いて，

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos^2 2\theta}{2}\right)^2d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos^2 2\theta\right)d\theta$$

再度，半角の公式を用いて，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{4} - \cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{4}\right) d\theta \\
&= \left[\frac{3}{4}\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{3}{16}\pi - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

」（+10 点）

従って，求めるべき面積Sは

$$S = \frac{3}{16}\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}\pi - \frac{3}{8}$$

である.」（+4 点）

【講評】

⑴　難易度 C

シッソイドは入試であまり出題されないため，初めて見た人も多いだろう.しかし，サイクロイドなどと同じように，座標設定をし，媒介変数を落ち着いて消せばそこまで難しくない問題である記述も同じようにすれば問題ないため，標準的な難易度といえる.

⑵　難易度 B

OQの傾きを求めるのは非常に優しい．⑴ができているのであれば，スムーズにいけるだろう背景に立方体倍積問題がある.「ある立方体の体積が 2 倍の立方体を作図する」という条件を「$\sqrt[3]{2}$を作図する」と言い換えられれば，OQの傾きをヒントに説明できるだろう．発想は求められるが，条件の言い換えを適切に行えるかを見る，標準よりやや易しい問題と言える.

⑶　難易度 D

やることは単純明快だが，積分計算が非常に重い基礎的な積分計算ができるかを見るための問題だった．制限時間と計算の重さを考えて，答えを合わせるのは厳しい，標準よりやや難しい問題.

総合的に，シッソイドというあまり見慣れない形の軌跡を，考えて求められるかを見る設問であった．軌跡や面積の問題は計算がうるさくなる傾向にあるので，求めるべき式だけを書いて，計算は時間があったら戻ってくるという手法も有効だろう．この曲線はギリシアの三大作図問題を解決するために，$\sqrt[3]{2}$を図示する目的でディオクレスによって発見された．入試ではこのような有名問題を背景とした問題がよく出題されるため，有名定理や有名問題に触れておくこともよい訓練となるだろう．最後の積分計算は重いが，落ち着いてこなせば，基礎的なことの積み重ねである．多少強引にでも，計算して答えを合わせることも試験では重要になるため，日ごろから計算力を養うことが大切である.

大問$\boxed{3}$総合して難易度は C

$\boxed{4}$ (1) (30 点)

$S=0$となるためには,

$$\sin\frac{b}{a}\pi=0\ \ or\ \ \sin\frac{c}{b}\pi=0\ \ or\ \ \cos\frac{a}{c}\pi=0$$

が必要である.

$$\sin k\pi=0\ ,\ \cos\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi=0\quad (k\text{は整数})$$

であるから,

$$\cos\frac{a}{c}\pi=0$$

となる a,c の組は

$$(a,c)=(1{,}2),(2{,}4),(3{,}2),(5{,}2),(6{,}4)$$

でありこれらそれぞれに b の選び方が 6 通りずつあるので，計 30 通り.

$$\sin\frac{b}{a}\pi=0$$

となる a,b の組は,

$$(a,b)=(1{,}1),(1{,}2),(1{,}3)(1{,}4),(1{,}5),(1{,}6),(2{,}2)$$
$$(2{,}4),(2{,}6),(3{,}3),(3{,}6),(4{,}4),(5{,}5),(6{,}6)$$

であり，それぞれに c の選び方が 6 通りあるから，計 84 通り.

$$\sin\frac{c}{b}\pi=0$$

となる組も同様に 84 通りある．これらの中で，重複して数え上げているものを除く.

$$\sin\frac{b}{a}\pi=0\wedge\sin\frac{c}{b}\pi=0$$

となる組は,

$(a,b)=(1{,}1)$に対して c は 6 個.

$(a,b)=(1{,}2)$に対して c は 3 個

$(a,b)=(1{,}3)$に対して c は 2 個

$(a,b)=(1{,}4)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(1{,}5)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(1{,}6)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(2{,}2)$に対して c は 3 個

$(a,b)=(2{,}4)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(2{,}6)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(3{,}3)$に対して c は 2 個

$(a,b)=(3{,}6)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(4{,}4)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(5{,}5)$に対して c は 1 個

$(a,b)=(6{,}6)$に対して c は 1 個

で計 25 通り.

$$\sin\frac{b}{a}\pi=0\wedge\cos\frac{a}{c}\pi=0$$

となる組は,

$(a,c)=(1{,}2)$に対してbは 6 個

$(a,c)=(2{,}4)$に対してbは 3 個

$(a,c)=(3{,}2)$に対してbは 2 個

$(a,c)=(5{,}2)$に対してbは 1 個

$(a,c)=(6{,}4)$に対してbは 1 個

の計 13 通り.

$$\sin\frac{c}{b}\pi=0\wedge\cos\frac{a}{c}\pi=0$$

となる組は,

$(a,c)=(1{,}2)$に対してbは 2 個

$(a,c)=(2{,}4)$に対してbは 3 個

$(a,c)=(3{,}2)$に対してbは 2 個

$(a,c)=(5{,}2)$に対してbは 2 個

$(a,c)=(6{,}4)$に対してbは 3 個

の計 12 通り.

$$\sin\frac{b}{a}\pi=0\wedge\sin\frac{c}{b}\pi=0\wedge\cos\frac{a}{c}\pi=0$$

となる(a,b,c)の組は

$$(1{,}1{,}2),(1{,}2{,}2),(2{,}2{,}4),(2{,}4{,}4),(3{,}3{,}6),(3{,}6{,}6)$$

の 6 組であるから，求めるべき確率は

$$\frac{30+84+84-25-13-12+6}{216}=\frac{154}{216}=\frac{77}{108}$$

である.」(20 点)(答えに＋10 点)

$\boxed{4}$ (1) (20 点)

$$-1\leq\sin x\leq 1\ ,-1\leq\cos x\leq 1$$

であることより，もしSが整数となるならば,

$S=-1\ or\ 0\ or\ 1$のときに限られる.

(i) $S=0$のとき：(1)で求めた通りである.

(ii) $S=1$のとき

(ii)-(a) $\cos\frac{a}{c}\pi=1$のとき

$(a,c)=(2{,}1),(4{,}1),(6{,}1),(4{,}2),(6{,}3)$であり，

このとき，$\sin\frac{b}{a}=1\,,\sin\frac{c}{b}\pi=1$とすれば，

$(a,b,c)=(4{,}2{,}1)$の 1 通り．

$\sin\frac{b}{a}=-1\,,\sin\frac{c}{b}\pi=-1$を満たす組はない．

(ii)-(a) $\cos\frac{a}{c}\pi=-1$のとき

$(a,c)=(1{,}1),(2{,}2),(3{,}1),(3{,}3)(4{,}4),$
$(5{,}1),(5{,}5),(6{,}6)$ であり，

このとき，$\sin\frac{b}{a}=-1\,,\sin\frac{c}{b}\pi=1$とすれば，

これを満たす組はない．

$\sin\frac{b}{a}=1\,,\sin\frac{c}{b}\pi=-1$とすれば，

これを満たす組はない．

(iii) $S=-1$のとき

これを満たす組はない．

以上より⑴とあわせて，Sが整数となる場合の数は$154+1=155$通り．従って，求めるべき確率は

$$\frac{155}{216}$$

である.」(+13 点)(答えに+7 点)

【講評】

⑴難易度 E

正しく場合分けするのが非常に困難であり，試験時間中に場合分けしきるのは厳しいだろう．しかし，発想は至ってシンプルなので，方針は立てやすい．3 つの要素を正しく数えられるかを見るための問題であるが，完答は非常に難しい．

⑵難易度 D

こちらも場合分けが煩雑であり，数え漏れをしやすい設問である．こういった問題を正しく解ききるためには，計算用紙を贅沢に使い，順番に数え上げていくことが大切である．

総合して，場合分けが非常に煩雑になる難問．

大問 $\boxed{4}$ 総合して難易度は D

$\boxed{5}$ (40 点)

連続n整数の積

$$m\times(m-1)\times\cdots\times(m-n+1)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

が$n!$で割り切れる事を示す事は，

$\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$が整数になることを示す事と同値である.」(+10 点)(☆)

ここでm個の物からn個を選ぶ組み合わせの数は

$${}_mC_n=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}\text{通り}$$

であり，これは紛れもなく整数であるため，題意は示された.」(+30 点)■

〈別解〉

(☆)のつづき

任意の素数pに対し，上式の分母と分子が何個の素因数pを持つかを数え，分子のほうが多い事を示す．ルジャンドルの定理より，$m!$が持つ素因数pの個数は($\lfloor x\rfloor$はxを超えない最大の整数とする)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{m}{p^k}\right\rfloor\text{個.}$$

同様に，$n!\,(m-n)!$が持つ素因数pの個数は，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m-n}{p^k}\right\rfloor\right)\text{個.}$$

ここで floor 関数の性質より，$\lfloor x+y\rfloor\geq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$であるから，題意は示された．

【講評】

難易度 C

整数の有名定理を証明する問題である．技巧的ではあるが，二項係数の意味を考える事で，瞬時に示す事ができる．思いつかなかった場合は別解のように地道に示すと良い．数式から組み合わせに持ち込むというテクニックはたまに出てくるため，よく演習しておくと良い．標準的かそれよりやや易しい難易度の問題．

$\boxed{6}$ (1) （7 点）

$f(t)=e^{at}$に対する$F(s)$は，定義より

$$F(s)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} e^{-st}\cdot e^{at}\,dt$$
$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^{\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)\varepsilon}+\frac{1}{s-a}\right)$$
$$=\frac{1}{s-a}$$

である.」(＋7 点)

$\boxed{6}$ (2) （2 3 点）

$$\mathcal{L}[f'(t)]=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} e^{-st}f'(t)\,dt$$
$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left([e^{-st}f(t)]_0^{\varepsilon}-\int_0^{\varepsilon}(e^{-st})'f(t)\,dt\right)$$
$$=\big(0-\ f(0)\big)+\lim_{\varepsilon\to\infty}s\int_0^{\varepsilon}e^{-st}f(t)\,dt$$
$$=-\ f(0)+sF(s)$$

$\therefore\ \mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-\ f(0)\cdots$①

である.」(＋10 点)

$$\mathcal{L}[f''(t)]=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} e^{-st}f''(t)\,dt$$
$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left([e^{-st}f'(t)]_0^{\varepsilon}-\int_0^{\varepsilon}(e^{-st})'f'(t)\,dt\right)$$
$$=\big(0-\ f'(0)\big)+\lim_{\varepsilon\to\infty}s\int_0^{\varepsilon}e^{-st}f'(t)\,dt$$
$$=-\ f'(0)+s\ \mathcal{L}[f'(t)]$$

①より，

$$\mathcal{L}[f''(t)]=-\ f'(0)+s\big(sF(s)-\ f(0)\big)$$
$$=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\cdots②$$

である.」(＋13 点)

$\boxed{6}$ (3) （30 点）

$$f''(t)+f(t)-2f(t)=e^{-t}$$

は(1)，①，②，$f(0)=0$，$f'(0)=0$より次のように変換できる.

$$s^2F(s)+sF(s)-2F(s)=\frac{1}{s+1}$$

左辺を$F(s)$でくくり，

$$(s^2+s-2)F(s)=\frac{1}{s+1}$$
$$(s+2)(s-1)F(s)=\frac{1}{s+1}$$
$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$

である.」(＋10 点)

部分分数展開して，

$$F(s)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

である．よって，積分変換の線形性と(1)より

$$f(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{t}$$

である.」(＋13 点)（答えに＋7 点）

【講評】

(1) 難易度 A

定義がわかればただ積分し，極限操作をするだけの問題である．易しい.

(2) 難易度 C

難しくはないが，なれていないと部分積分の形が見えにくい．また，ほとんどの人が見慣れない変換であると思うから，数式を読み解いて運用できるかという能力が求められる．標準的な難易度.

(3) 難易度 D

二階線形非斉次微分方程式をラプラス変換により解く問題．やっていることは難しくないが，なれていないため，何をしなければならないかが見え

ない人も多かったと思われる．また，微分方程式自体があまり入試で問われないため，演習をしていない人も多く，発想的にも難しかったか.
問題自体は難しくないが，経験値を鑑みて，完答は難しいと思われる．標準より難.

総合して，ラプラス変換を背景に，微分方程式を解くと言う問題であった．ほとんどの人が見たことがない問題であるだろうから，見た目の難しさに惑わされてしまうということも十分あり得る．しかし，実際の試験の場面ではこういった見た目が怖い問題でも，やってみると意外と手がつけやすいという事もあるため，日々の演習の中で，どういった問題から優先的に手をつけるかという事を考えながら問題を解くことが大切である．
設問としては標準よりやや程度の高い問題である．

大問 $\boxed{6}$ 総合して難易度は D

【総括】
有名問題や典型問題に少し手を加え，標準〜やや難の問題を取りそろえた問題構成であった．配点を見るとわかると思うが，計算の重い設問や，ほとんどの人が見たことがない（であろう）設問の配点を高くした．従って，4 割ほどの得点率までは容易に届くが，そこからの思考力によって得点率が大きく変わる問題群である．6 割を超えることを目標に問題を解くと良いだろう．数学の得意な人や，数学を得点源にしたいという人は，得点率が 7 割を超えれば十分に良いと考えられる．また，記述に関してはそこまで難しくない問題群をそろえたので，難しくない記述で得点を落とさないように，注意したい．難関大（特に東大，京大，東工大）では記述の巧拙で得点が大きく変わるため，日頃から論理の飛躍がない答案を作れるように訓練しておくべきと言える．

編集後記

こんにちは、今年度のかずけんの会誌の編集を務めました、2 年の藤井佑成です。さて、千葉高の数学研究会、「かずけん」の会誌はお楽しみいただけたでしょうか。「かずけん」は今年で三代目となりますが、実は正式な部活でも同好会でもありません。ですから、勧誘などは行われておらず、知る人ぞ知る団体となっているのです。特に今年は「かずけん」補足時の先輩が卒業してしまい、「かずけん」の存亡自体も危ういような状況にありました。しかし、せっかく先輩方が作って下さったこの団体が私たちの代で途絶えてしまうのはあまりに残念だと思い、私は数学好きの友人たちや後輩を「かずけん」に誘い、会誌の執筆をお願いしました。そして今日、こうして第三代・かずけん会誌を無事発行することができ、安心するとともに、誇らしく思っています。執筆をしてくださった方々、そして会誌の発行にご協力いただいた皆様、本当にありがとうございました。

今後も「かずけん」の活動がますます盛んになり、会誌の発行も千葉高の伝統となってゆくことを願っています。(入会希望の方はお気軽にお申し付けください。) 今後とも「かずけん」をどうぞよろしくお願いいたします。

県立千葉高校数学研究会 第三代編集長　藤井 佑成

かずけん 第三号 2024

2024 年 9 月 14 日発行

顧問: 長 新人 先生

編集: 藤井 佑成

発行: 県立千葉高校数学研究会

Instagram: @kazuken_chs

X: @kazuken_chs

https://sites.google.com/kenchiba.net/kazukenchs

〒260-0853　千葉県千葉市中央区葛城 1-5-2

TEL 043(227)7434 (代表)

三代目

かずけん